I. ESPAÇOS CURVOS EM DUAS DIMENSÕES

De acordo com Newton todas as coisas atraem a todas as demais com uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas, e os objetos respondem às forças com acelerações proporcionais às forças. São as leis de Newton da gravitação e do movimento. Como sabem, dão conta do movimento de bolas, planetas, satélites, galáxias, etc.

Einstein tinha uma interpretação diferente da lei de gravitação. De acordo com ele, o espaço e o tempo - que devem pôr-se juntos como espaço-tempo - curvam-se nas vizinhanças de massas pesadas . E é o esforço das coisas para seguir "linhas retas" neste espaço-tempo curvo o que faz que se movam na forma em que o fazem . Esta é uma idéia complexa - muito complexa -. É a idéia que queremos explicar neste capítulo.

Nosso tema tem três partes. Numa intervém os efeitos gravitacionais; na outra idéias de espaço-tempo que já estudamos; e na terceira a idéia do espaço-tempo curvo. Simplificaremos nosso tema no começo não nos
preocupando da gravidade e deixando de lado o tempo- discutindo simplesmente o espaço curvo- . Falaremos mais adiante das outras partes, mas nos concentraremos agora na idéia do espaço curvo - que se entende por espaço curvo, e mais especificamente o que se entende por espaço curvo nesta aplicação de Einstein-. Agora bem, resulta que ainda assim é algo difícil em três dimensões. Portanto, reduziremos primeiramente o problema ainda mais e falaremos do que se entende com as palavras "espaço curvo" em duas dimensões.

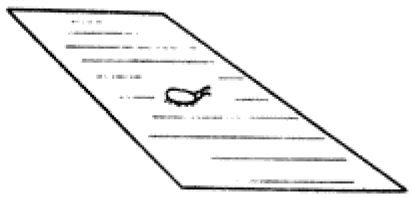


Fig. 01 - Uma pulga "Odete" sobre uma esfera.

Com o fim de entender esta idéia do espaço curvo em duas dimensões tem que dar-se conta realmente do ponto de vista limitado de quem vive num espaço deste tipo. Suponham que nos imaginamos um inseto sem olhos que vive sobre um plano, como mostra a figura abaixo . Pode-se mover somente sobre o plano e não tem maneira de saber se há um meio de descobrir um "mundo exterior" . (Não tem a imaginação de vocês.). Por hipótese, vamos raciocinar por analogia. VIVEMOS num mundo tridimensional e não nos imaginamos para nada que se possa sair deste mundo tridimensional em uma nova direção; de maneira que faremos as coisas por analogia. É como se fossemos insetos vivendo em um plano e existisse um espaço em outra direção. É por isto que trabalharemos primeiro com o inseto, lembrando que deve viver sobre sua superfície e não pode sair dela.

Como outro exemplo de inseto que vive em duas dimensões, podemos imaginar um que viva sobre uma esfera. Imaginamos que pode caminhar pela superfície da esfera, como se vê na figura 2, mas não pode ver "para cima", ou "para baixo", ou "para fora".

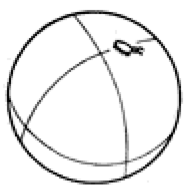


Fig. 02 - Uma pulga "   sobre uma esfera

Vamos considerar a <u>terceira</u> classe de criatura. Também é um inseto como os demais, e também vive sobre um plano como o nosso primeiro animalzinho, mas desta vez o plano é muito particular. A temperatura é diferente em diferentes lugares. Ainda mais, o inseto e qualquer régua que possa utilizar são feitas do mesmo material, que se dilata quando é aquecido. Sempre que ele colocar uma régua em qualquer lugar para medir algo, a régua se dilata de forma imediata a fim de adotar o comprimento correspondente a essa temperatura e esse lugar. Onde quer que coloque algum objeto - o mesmo uma régua, um triângulo,
"placa quente" a casa de nosso terceiro inseto ainda que preferiríamos pensar particularmente em uma classe especial de placa quente que seja fria no centro e cada vez mais quente à medida que nos aproximamos aos bordos . (Figura 3).

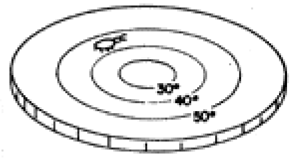


Fig. 03 - Uma pulga " Jo...." numa chapa quente

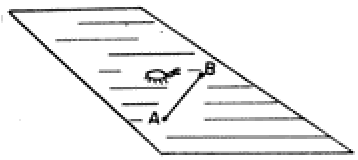


Fig. 04 - Fazendo uma "linha reta" num plano

Agora vamos imaginar que nossos insetos começam a estudar geometria. Ainda que imaginemos que sejam. cegos, isto é que não podem ver nada do mundo "exterior", podem fazer muitas coisas com suas patas e antenas. Podem desenhar linhas, podem construir réguas e medir comprimentos. Suponhamos primeiramente que comecem com a idéia mais simples de geometria. Aprendam a traçar uma reta - definida como a linha mais curta entre dois pontos. Nosso primeiro inseto - ver fig. 4 - aprende a traçar muito boas retas.

Mas o que acontece com o inseto da esfera? Traça suas retas como a menor distância - para eles - entre dois pontos, como se vê na figura 5 . A nós parecerá uma curva, mas o inseto não tem meios para sair da esfera e descobrir que na "realidade" há uma linha mais curta. Sabe simplesmente que se tentar qualquer outra trajetória EM SEU MUNDO, ela sempre será maior que sua linha reta. Porque devemos reconhecer que sua reta é o arco mais curto entre dois pontos. (É claro, é um arco de círculo máximo) .

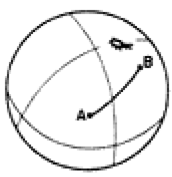


Fig. 05 - Fazendo uma "linha reta" sobre uma esfera.

Finalmente, nosso terceiro inserto - o da figura 3 - desenhará igualmente sua "reta" que a nós nos parecerá uma curva. Por exemplo, a menor distância entre A e B na figura 6 será uma curva como a indicada. Por quê ? Por que quando a linha se curva para a parte mais quente da placa quente, as réguas tornam-se maiores (desde que nosso ponto de vista onisciente) e bastam menos "metros" postos em fila para ir de A até B. Portanto, PARA ELE a linha é reta - não tem nenhuma maneira de saber que poderia existir alguém fora num estranho mundo tridimensional que poderia chamar "reta" a uma linha que fosse diferente.

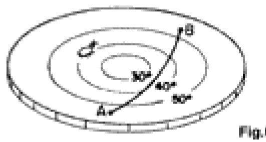


Fig.06 - Fazendo uma "linha reta" noma chapa quente.

Cremos que agora você tenha a idéia de que todo o resto de nossa análise se realizará sempre do ponto de vista das criaturas nas superfícies particulares e não de nosso ponto de vista. Com isto em mente, vejamos que outros aspectos tem suas geometrias. Suponham que todos os insetos tenham aprendido a construir duas linhas que se interceptam em ângulo reto. (Pode-se imaginar como eles poderiam fazer). Então nosso primeiro animalzinho (o que está sobre o plano normal) descobre um fato interessante. Se ele parte do ponto A e constrói uma linha de l00 centímetros de comprimento, então dobra em um ângulo reto e marca outros 100 centímetros, então dobra novamente em um ângulo reto e marca outros l00 centímetros, então dobra novamente em um ângulo reto e marca outros 100 centímetros; ao final se encontra no ponto de partida, como mostra a figura 7a. É uma propriedade de seu mundo - um dos fatos de sua "geometria".

Logo descobre outra coisa interessante. Constrói - se um triângulo - uma figura com três retas - a soma dos ângulos é igual a l80°, isto é, a soma de dois ângulos retos. Vejam a figura 7b.

Logo inventa o círculo. O que é um círculo? Um círculo se constrói desta maneira: a partir de um só ponto se traçam linhas retas em muitíssimas direções e se assinala um conjunto de pontos que estão todos a mesma distância do ponto de partida. Vejam a figura 7c. (Devemos ter cuidado ao definir estas coisas para que possamos fazer as analogias com respeito a seus companheiros). É claro, a curva obtida é equivalente à que você obteria fazendo girar uma régua em torno de um ponto . Como queira que seja, nosso inseto aprende a construir círculos. Logo, um dia pensa em medir a distância ao redor do círculo. Mede vários círculos e encontra uma clara relação: a distância ao redor do círculo é sempre o mesmo número multiplicado pelo raio r (o qual, é claro, é a distância do centro até a curva) . A circunferência e o raio tem sempre a mesma relação - aproximadamente 6, 283 independentemente do tamanho do círculo.

Vejamos agora o que tem encontrado os outros insetos a respeito de SUAS geometrias . Primeiro, o que acontece com o inseto que está sobre a esfera quando trata de construir um quadrado ?

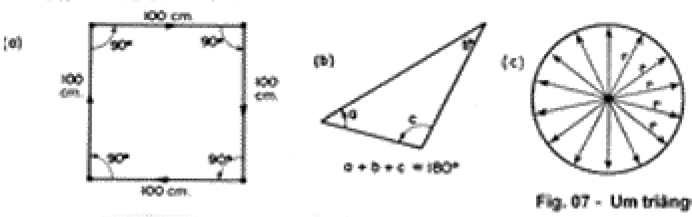


Fig. 07 - Um triângulo e um circulo num espaço plano

Se ele segue as retas que demos antes provavelmente pensará que o resultado não valia tanto trabalho. Obtém uma figura parecida à que se mostra na figura 8. Seu ponto final B não se superpõe a seu ponto de partida A. Não resulta nenhuma figura fechada. Tome uma esfera e prove. Algo semelhante acontecerá a nosso amigo da placa quente. Se ele traça quatro retas de igual comprimento - medidas com suas réguas que se dilatam - unidas em ângulo reto eles obtém uma figura parecida à da figura 9

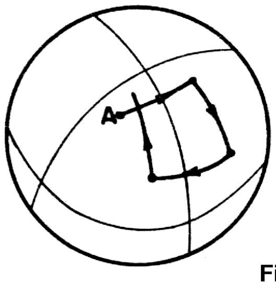


Fig. 08 - Tentando fazer um "quadrado" sobre uma esfer

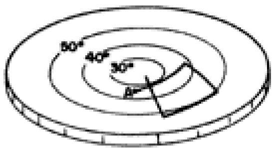


Fig. 09 - Tentando fazer um "quadrado" sobre uma chapa

Suponha agora que cada um de nossos insetos tenham seu próprio Euclides que diz a eles como "deve" ser a geometria, e eles tem verificado aproximadamente o que lhes foi dito, fazendo medições imperfeitas em pequena escala. Então quando tentarem fazer medidas (ou quadrados) mais precisos numa escala maior eles descobrirão que algo estava errado. O que importa é que somente com MEDIÇÕES GEOMÉTRICAS descobriram que passa algo com seu espaço. Definimos um ESPAÇO CURVO como aquele onde a geometria não é a que se espera para um plano. A geometria, dos insetos sobre a esfera ou sobre a placa quente é a geometria de um espaço curvo. As regras da geometria de Euclides fracassam. E não é necessário poder sair do plano para dar-nos conta de que o mundo em que vivemos é curvo. Não é necessário circunnavegar o globo para dar-se conta de que é uma bola. Você pode encontrar que vive sobre uma bola simplesmente construindo um quadrado. Se o quadrado é muito pequeno você necessitará bastante precisão, mas se o quadrado é grande as medidas poderão realizar-se mais imperfeitamente.

Tomemos o caso do triângulo sobre um plano. A soma dos ângulos é 180°. Nosso amigo da esfera poderá encontrar triângulos muito raros. Por exemplo podem encontrar triângulos que tem TRÊS ÂNGULOS RETOS. De verdade ! A figura l0 mostra um. Suponha que nosso inseto parte do polo norte e traça uma linha reta até o equador. Logo dobra em ângulo reto e constrói outra linha reta perfeita do mesmo comprimento. E, então, faz o mesmo novamente. Devido o comprimento muito especial que ele escolheu se encontra novamente no ponto de partida e ainda mais encontra a primeira linha reta num ângulo reto. Portanto não há dúvidas de que para seu triângulo tem-se três ângulos retos, isto é que a soma é 270º.Resulta que para ele a soma dos ângulos de um triângulo é SEMPRE maior que 180º. Com efeito, o excesso
(para o caso especial mostrado é de 90º) é proporcional à superfície do triângulo. Se um triângulo sobre uma esfera é muito pequeno seus ângulos somam aproximadamente l80°, ou somente um pouco mais. A medida que o triângulo é maior, a discrepância se faz maior. O inseto que está sobre a placa quente descobrirá dificuldades semelhantes com seus triângulos.

Passemos a examinar o que encontram os outros insetos com respeito aos círculos. Constróem círculos e medem suas circunferências. Por exemplo, o inseto da esfera poderá traçar um círculo tal como o da figura 11. E descobrirá que a circunferência é MENOR que 2π vezes o raio. (Você pode ver que devido a sabedoria de nossa vista tridimensional isto resulta evidente, já que quando se fala d o "raio" s e refere a uma curva MAIS LONGA que o raio verdadeiro do círculo). Suponha que o inseto da esfera tenha lido Euclides e decidiu predizer um raio dividindo a circunferência C por 2π; e obteve

$$r_{pred} = \frac{C}{2\pi}$$

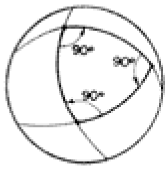


Fig. 10 - Sobre uma esfera um "triângulo" pode ter trê ângulos de 90°

Logo encontrará que o raio medido é maior que o predito. Continuando com seu estudo, poderá definir a diferença como o "excesso radial" e escrever

$$r_{med} - r_{pred} = r_{exc}$$

e estudar como o excesso radial depende do tamanho do círculo.

Nosso inseto da placa quente descobrirá um fenômeno parecido. Suponha que ele trace um círculo centrado no ponto frio da placa como na figura 12. Se o observássemos enquanto traça o círculo notaríamos que suas réguas são mais curtas ao redor do centro e mais compridas a medida que as leva até a periferia - embora o inseto não saiba, é claro -. Quando mede a circunferência, a régua é sempre comprida, assim também ele encontra que o raio medido é maior que o predito C/2π. O inseto da placa quente também encontra um "excesso radial". E novamente a magnitude do excesso depende do raio do círculo. DEFINIREMOS como "espaço curvo" aquele em que se apresentam erros geométricos deste tipo: a soma dos ângulos de um triângulo é diferente de l80°;a circunferência dividida por 2π não é igual ao raio; a régua para traçar um quadrado não dá uma figura fechada. Você pode pensar em outros.

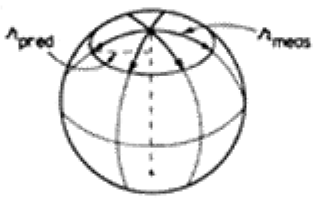


Fig. 11 - Fazendo um circulo sobre uma esfera

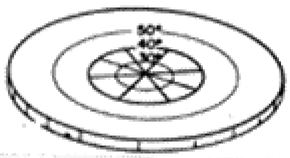


Fig.12 - Fazendo um circulo sobre uma chapa quente

Temos dado dois exemplos diferentes de espaço curvo: a esfera e a placa quente . Entretanto, é interessante que se tomarmos a variação correta da temperatura em função da distância na placa quente, as duas geometrias serão exatamente iguais. Isto é bastante divertido. Podemos fazer
que o inseto da placa quente obtenha exatamente o mesmo resultado que o animalzinho da esfera. Àqueles que gostam de geometria e dos problemas geométricos lhes diremos como podem fazer. Se você assumir que o comprimento
das réguas (como determinada pela temperatura) varia na proporção de um mais certa constante vezes o quadrado da distância a origem, você pode encontrar que a geometria da placa quente é exatamente igual em todos os detalhes (exceto para o ponto no infinito) à geometria da esfera.

Há, é claro, outras classes de geometria. Poderíamos interessar-nos pela geometria de um inseto que vive sobre uma pêra, isto é algo que tenha uma curvatura mais acentuada num lugar que em outro, de maneira que o excesso angular nos triângulos seja mais notável quando constrói-se triângulos pequenos numa parte de seu mundo que quando os constrói em outra parte. Em outras palavras, a curvatura de um espaço pode variar de um lugar para outro. É somente uma generalização da idéia. Pode-se também imitar com uma distribuição correspondente de temperaturas sobre uma placa quente.

Podemos assinalar ainda mais que os resultados poderiam apresentar-se com o tipo oposto de discrepância Você poderia encontrar, por exemplo, que todos os triângulos tem a soma de seus ângulos menor que 180°quando são muito grandes. Pode parecer impossível, mas não é. Primeiro de tudo, poderíamos ter uma placa quente com a temperatura decrescendo com a distância ao centro. Então todos os efeitos se invertiam. Mas também podemos fazer isto em forma puramente geométrica observando a geometria bidimensional da superfície de uma sela de montar a cavalo. Imaginem uma superfície em forma de sela de montar a cavalo como esboçada na figura 13. Desenhe agora um "circulo" sobre a superfície, definido como o 1ugar geométrico de todos os pontos a mesma distância de um centro. Este círculo é uma
curva que oscila para cima e para baixo com um efeito de . A circunferência que resulta é maior que a que seria de esperar do cálculo de 2 π r. Assim pois C/2π é agora menor que r. O excesso radial será negativo.

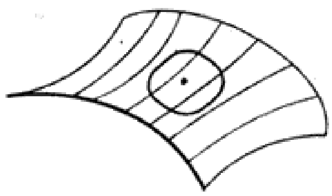
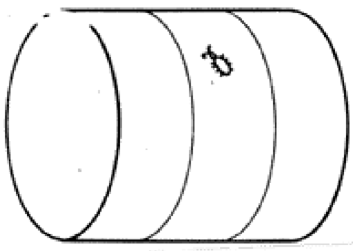


Fig. 13 - Um "circulo" sobre uma superfice em forma de sela de montaria

Fig. 14 - Um espaço bidimensional com curvatura intrinseca zero


Esferas, pêras e superfícies similares são todas de curvatura POSITIVA; enquanto que as outras se chamam superfícies de curvatura NEGATIVA. Em geral, um mundo de duas dimensões terá uma curvatura que varia de um lugar a outro e pode ser positiva em alguns lugares e negativa em outros. Em geral, entendemos por espaço curvo simplesmente um em que as regras da geometria de Euclides perde a validade por discrepância de um sinal ou outro. O grau de curvatura - definido pelo excesso radial, digamos - pode variar de um lugar a outro.

Assinalamos que, segundo nossa - definição de curvatura, resulta bastante surpreendente que um cilindro não seja curvo. Se um inseto vivesse sobre um cilindro, tal como mostra a figura l4, encontraria que os triângulos, quadrados e círculos tem o mesmo comportamento que sobre uma plano Isto é fácil de ver, pensando simplesmente como se veriam todas as figuras se o cilindro se desenrolasse sobre um plano. Então se pode fazer com que todas as figuras geométricas correspondam exatamente às que estão no plano. Assim pois, não há forma de que um inseto que viva sobre um cilindro (supondo que não dê a volta em todo o cilindro, mas que realize somente medições locais) descubra que seu espaço é curvo. Do que vamos falar é do que se chama mais precisamente curvatura INTRÍNSECA; isto é, uma curvatura que se pode encontrar somente por medidas em uma região localizada. (Um cilindro não tem curvatura intrínseca.). Este é o sentido que pretendia Einstein quando dizia que nosso espaço é curvo. Mas, até agora temos definido somente um espaço curvo em duas dimensões; devemos seguir
Adiante para ver o que pode significar esta idéia em três dimensões.

2. A CURVATURA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL .

Vivemos num espaço tridimensional e vamos considerar a idéia de que o espaço tridimensional é curvo. Vocês me dirão mas como pode você imagina-lo que se curva numa direção qualquer ? Bem, não podemos imaginar que o espaço se curva em uma dada direção qualquer porque nossa imaginação não é suficientemente boa. (Talvez seja bom que não possamos imaginá-lo muito a fim de não desvincularmos em demasia do mundo real). Mas podemos sempre definir uma curvatura sem sairmos do nosso mundo tridimensional. Tudo que temos discutido a respeito de duas dimensões foi simplesmente um exercício para mostrar-lhes como podemos obter uma definição da curvatura que não requereria que fôssemos capazes de "olhar para dentro" do lado de fora. Podemos determinar se nosso mundo é curvo ou não de uma maneira bastante análoga à usada pelos senhores que vivem sobre a esfera ou sobre a placa quente . Pode ser que não sejamos capazes de distinguir entre estes dois casos, mas certamente podemos distingui-los do caso do espaço plano, isto é do plano ordinário. Como ? Bastante fácil: traça-se um triângulo e mede-se os ângulos. OU traçamos um círculo e medimos a circunferência e o raio. OU tratamos de traçar um quadrado preciso, ou construir um cubo. Em cada caso verificamos se se cumprem as leis da geometria. Se não se cumpre dizemos que nosso espaço é curvo. Se traçamos um grande triângulo e a soma dos ângulos excede os 180°, podemos dizer que nosso espaço é curvo. Ou se medirmos o raio de um círculo e não resulta igual a circunferência dividido por 2π podemos dizer que nosso espaço é curvo.

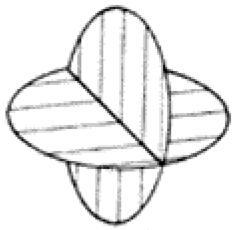


Fig. 15 - O exceceso de raio pode ser diferente para c círculos com diferentes orientações

Notarão que em três dimensões a situação pode ser muito mais complicada que para duas. Em duas dimensões há um certo grau decurvatura em qualquer ponto. Mas em três dimensões pode haver várias COMPONENTES da curvatura. Se traçamos um triângulo sobre certo plano, poderemos obter uma resposta diferente da que obteríamos se orientamos o plano do triângulo de uma maneira diferente. Ou podemos tomar o exemplo de um círculo. Suponham que desenhamos um círculo e medimos o raio e não coincide com $C/2\pi$, de modo que há certo excesso radial. Desenhamos agora outro círculo perpendicular ao primeiro - como na figura 15 -. Não é necessário que o excesso seja o mesmo exatamente para ambos os círculos . Com efeito, pode haver um excesso positivo para o círculo do plano e um defeito (excesso negativo) para o círculo do outro plano.

Talvez você esteja pensando em uma idéia melhor: não poderíamos evitar todas estas componentes utilizando uma esfera em três dimensões ? Podemos especificar uma esfera tomando todos os pontos de uma superfície que estejam à mesma distância de um ponto do espaço. Logo, podemos medir a superfície traçando um retículo retangular muito fino sobre a superfície da esfera e somando todos os pedacinhos de superfície. De acordo com Euclides a superfície total A deveria ser 4π vezes o quadrado do raio; portanto podemos definir um "raio predito" como $\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$. Mas também podemos medir diretamente o raio fazendo um buraco até o centro e medindo a distância. Novamente podemos tomar o raio medido menos o predito e chamar de excesso radial a diferença.

$$r_{exc} = r_{med} - \sqrt{\frac{\text{superfície medida}}{4\pi}}$$

que será uma medida perfeitamente satisfatória da curvatura. Tem a grande vantagem de que não depende de como se orienta um triângulo ou um círculo .

Mas excesso radial de uma esfera tem também uma desvantagem; não caracteriza completamente o espaço. Ele dá o que se chama de CURVATURA MÉDIA DO MUNDO tridimensional, posto que é um efeito médio sobre as diversas curvaturas. Sendo uma média, não resolve completamente o problema de definir a geometria. Se somente se conhece este número não se pode predizer todas as propriedades da geometria do espaço, porque não se pode dizer o que acontece com um circulo de orientação diferente . A definição completa requer a especificação de seis "números de curvatura" em cada ponto. É claro, os matemáticos sabem como escrever todos esses números. Você pode algum dia ler um livro de matemática onde se mostra como se escrevem todos de uma maneira elegante e com muita classe, mas é uma boa idéia conhecer primeiro em forma rudimentar o que é e o que tratam de escrever. Para a maioria de nossos objetivos a curvatura média será suficiente.

3. NOSSO ESPAÇO É CURVO.

Agora vem o problema principal. É verdade ? Isto é, o espaço físico real de três dimensões em que vivemos é curvo ? Uma vez que temos bastante imaginação para darmos conta da possibilidade de que o espaço seja curvo, a mente humana sente naturalmente curiosidade por saber se o mundo é ou não curvo. Pessoas tem feito medidas geométricas diretas para tratar de descobrir, mas não se tem encontrado desvios. Por outro lado, com raciocínios sobre a gravitação, Einstein descobriu que o espaço É curvo e queremos contar-lhes qual é a lei de Einstein para o grau de curvatura, e falar-lhes também um pouco de como chegou a seu descobrimento.

Einstein disse que o espaço é curvo e que a matéria é responsável pela curvatura. (A matéria é ainda mais a origem da gravitação, pelo que a gravidade está relacionada com a curvatura - mas isto veremos mais adiante neste capítulo -). Suponhamos para facilitar as coisas, que a matéria está distribuída em forma contínua com certa densidade, que pode variar, entretanto, tanto como queiram de um lugar a outro. A regra que Einstein deu para a curvatura é a seguinte : se numa região do espaço há matéria e tomarmos uma esfera suficientemente pequena como para a densidade ρ da matéria que contém seja efetivamente constante, então o EXCESSO RADIAL para a esfera é proporcional a massa que contém. Utilizando a definição de excesso radial temos

$$\text{Excesso radial} = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} - r_{med} = \frac{G}{3c^2}M$$

Aqui, G é a constante gravitacional (da teoria de Newton), c é a velocidade da luz e $M = 4\pi\rho r^3/3$ é a massa da matéria contida na esfera. Esta é a lei de Einstein para a curvatura média do espaço.

Suponham que tomamos a Terra como exemplo e esquecemos que a densidade varia de um ponto para outro - assim não temos que fazer integral alguma -. Suponham que medimos a superfície da Terra muito cuidadosamente
e logo fazemos um buraco até o centro e medimos o raio. A partir da área da superfície poderíamos calcular o raio predito que se obteria fazendo a superfície igual a $4\pi r^2$. Ao comparar o raio predito com o efetivo, encontraríamos que o raio efetivo excede o predito na quantidade dada pela equação acima. A constante $G/3c^2$ é de aproximadamente $2{,}5 \times 10^{-29}$ cm por grama, assim que para cada grama de material o raio medido difere do predito em 2, 5 x

10^{-29} cm. Introduzindo a massa da terra, que é ao redor de 6 x 10^{27} gramas, se encontra que a terra tem um raio que é l, 5 milímetro maior do que deveria ter de acordo com a sua superfície. Fazendo o mesmo cálculo para o Sol , encontra-se que o raio do Sol é meio quilômetro maior.

Devem notar que a lei diz que a curvatura " MÉDIA SOBRE" a superfície da terra é zero. Mas isto NÃO significa que todas as componentes da curvatura sejam zero. Pode haver - e de fato há - certa curvatura por cima da terra. Para um círculo haverá um excesso radial com sinal para certa orientação e com outro sinal (oposto) para outra orientação. Encontra-se imediatamente que a média sobre uma esfera é zero quando não há massa DENTRO dela. A propósito, encontra-se que há uma relação entre as diversas componentes da curvatura e a VARIAÇÃO da curvatura média de um lugar para outro. Assim, pois, se se conhece a curvatura em todas as partes, pode-se determinar os detalhes da curvatura em cada ponto. A curvatura média sobre a terra varia com a altura, assim que aí o espaço é curvo . E é esta curvatura o que vemos como força gravitacional.

Suponham que temos um inseto sobre um plano e que o "plano" tem pequenas rochas na sua superfície. Donde há uma rocha o inseto concluirá que seu espaço tem pequenas regiões com curvatura localizada. Temos o mesmo em três dimensões. Donde há um torrão de matéria, nosso espaço tridimensional terá uma curvatura localizada - uma espécie de rocha tridimensional.

Se fazemos um montão de protuberanças sobre um plano poderia haver uma curvatura global em todas as rochas: a superfície poderia chegar a se parecer com uma bola. Seria interessante saber se nosso espaço tem uma curvatura média total além das rochas locais, devidas aos torrões de
matéria como a terra e o sol. Os astrofísicos tem tratado de resolver esta questão realizando medidas em galáxias muito distantes. Por exemplo, se o número de galáxias que vemos em uma casca esférica a uma grande distância é diferente da que seria de esperar segundo nosso conhecimento do raio da casca teríamos uma medida do excesso radial de uma esfera tremendamente grande. A partir de tais medidas espera-se determinar se o universo inteiro é em média plano ou redondo - se é "fechado" como uma esfera, ou aberto como um plano. Você pode ter ouvido falar dos debates que se realiza, sobre este tema. Há debates devido a que as medidas astronômicas todavia não são nada conclusivas: os dados experimentais não são o suficientemente precisos para dar uma resposta definida. Desafortunadamente, não teremos a a mais vaga idéia sobre a curvatura global de nosso universo em escala grande.