ESTATÍSTICA

na Contabilidade – Parte 6

Luiz A. Bertolo

Medidas Estatísticas

A distribuição de frequências permite-nos descrever, de modo geral, os grupos de valores (*classes*) assumidos por uma variável. Com ela, por exemplo, podemos localizar se a maior concentração de valores de uma dada distribuição se encontra no início, no meio, ou no final dos valores.

Quando confrontamos distribuições e queremos destacar as tendências de cada uma, isoladamente, necessitamos de conceitos que expressem através de números estas tendências. Esses conceitos são denominados **elementos típicos** da distribuição (ou *estatísticas*) e são:

- Medidas de Posição (locação ou tendência central)
- Medidas de Dispersão (variabilidade)
- Medidas de Assimetria
- Medidas de Curtose

Cap. 5 - Medidas de Dispersão ou Variabilidade p. 103

Continuação

Medidas de Dispersão Relativa –p. 103

São medidas mais completas de dispersão

$$CV(x) = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$$

Coeficiente de variação - População

$$VR(x) = \frac{\sigma^2(x)}{\bar{x}^2}$$

Variância Relativa-População

São números puros que podem ser expressos em porcentagens.

NOTAÇÕES: Para uma série de dados representando uma População, a variância será denotada por $\sigma^2(x)$ (letra grega). Caso a série represente uma Amostra, a variância será denotada por $s^2(x)$ (letra latina).

Cálculo da Dispersão Relativa -Variável Contínua

Para uma VARIÁVEL CONTÍNUA representando uma população:

$$CV(x) = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$$

σ(x) é o desvio padrão e $\bar{x}$ é a média.

Para uma VARIÁVEL CONTÍNUA representando uma amostra:

$$CV(x) = \frac{s(x)}{\bar{x}}$$

s(x) é o desvio padrão e $\bar{x}$ é a média.

EXEMPLO:
Calcule o desvio-padrão da série abaixo, representativa de uma população

classe	Int. cl.	f_i
1	0|--4	1
2	4|--8	3
3	8|--12	5
4	12|--16	1

SOLUÇÃO

classe	Int. cl.	f_i	x_i	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$
1	0|--4	1	2	2	40,96
2	4|--8	3	6	18	17,28
3	8|--12	5	10	50	12,80
4	12|--16	1	14	14	31,36
Σ		10		84	102,4

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{84}{10} = 8,4$

O desvio padrão se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$$\sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{102,4}{10}} = \sqrt{10,24} = 3,2$$

$$CV(x) = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} = \frac{3,2}{8,4} = 38,09\%$$

O desvio-padrão se os dados representam uma AMOSTRA será:

$$\sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i - 1}} = \sqrt{\frac{102,4}{9}} = \sqrt{11,38} = 3,373$$

$$CV(x) = \frac{s(x)}{\bar{x}} = \frac{3,373}{8,4} = 40,15\%$$

Exercícios Propostos p. 104

Responda, justificando em cada caso, as questões abaixo:

a. Qual das séries apresenta maior dispersão absoluta?
b. Qual das séries apresenta maior dispersão relativa?
c. Qual das séries apresenta maior dispersão?

1. A: $\bar{X}_A = 20 \;\; e \;\; \sigma(A) = 2$ B: $\bar{X}_B = 20 \;\; e \;\; \sigma(B) = 5$

Solução

a. A série B possui maior dispersão absoluta, pois apresenta maior desvio-padrão.
b. A série B possui maior dispersão relativa, pois apresenta maior coeficiente de variação.
c. A série B possui maior dispersão, pois a dispersão relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

2. A: $\bar{X}_A = 50 \;\; e \;\; \sigma(A) = 2$ B: $\bar{X}_B = 100 \;\; e \;\; \sigma(B) = 3$

Solução

a. A série B possui maior dispersão absoluta, pois apresenta maior desvio-padrão.
b. A série A possui maior dispersão relativa, pois apresenta maior coeficiente de variação CV_A = (2/50)=0,04 e CV_B = (3/100)=0,03 .
c. A série A possui maior dispersão, pois a dispersão relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

Exercícios Propostos p. 104

Responda, justificando em cada caso, as questões abaixo:
a. Qual das séries apresenta maior dispersão absoluta?
b. Qual das séries apresenta maior dispersão relativa?
c. Qual das séries apresenta maior dispersão?

3. A: $\bar{X}_A = 20 \;\; e \;\; \sigma^2(A) = 9$ B: $\bar{X}_B = 30 \;\; e \;\; \sigma^2(B) = 16$

Solução

a. A série B possui maior dispersão absoluta, pois apresenta maior desvio-padrão.
b. A série A possui maior dispersão relativa, pois apresenta maior coeficiente de variação.
c. A série A possui maior dispersão, pois a dispersão relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

4. A: $\bar{X}_A = 30 \;\; e \;\; \sigma(A) = 9$ B: $\bar{X}_B = 50 \;\; e \;\; \sigma^2(B) = 9$

Solução

a. A série A possui maior dispersão absoluta, pois apresenta maior desvio-padrão.
b. A série A possui maior dispersão relativa, pois apresenta maior coeficiente de variação. CV_A = (9/30)=0,30 e CV_B = (3/50)=0,06 .
c. A série A possui maior dispersão, pois a dispersão relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

Exercícios Propostos p. 104

Responda, justificando em cada caso, as questões abaixo:
a. Qual das séries apresenta maior dispersão absoluta?
b. Qual das séries apresenta maior dispersão relativa?
c. Qual das séries apresenta maior dispersão?

5. A: $\bar{X}_A = 20 \;\; e \;\; \sigma^2(A) = 9$ B: $\bar{X}_B = 40 \;\; e \;\; \sigma(B) = 3$

Solução

a. As duas séries apresentam a mesma dispersão absoluta, pois os desvios-padrão são iguais.
b. A série A possui maior dispersão relativa, pois apresenta maior coeficiente de variação.
c. A série A possui maior dispersão, pois a dispersão relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

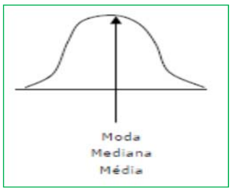
6. A: $\bar{X}_A = 20 \;\; e \;\; \sigma(A) = 3$ B: $\bar{X}_B = 60 \;\; e \;\; \sigma(B) = 9$

Solução

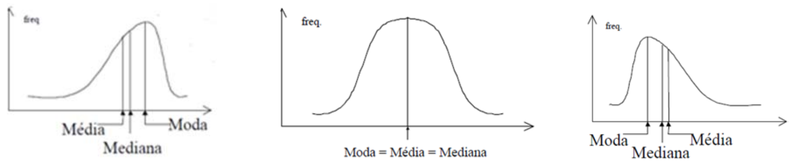
a. A série B possui maior dispersão absoluta, pois apresenta maior desvio-padrão.
b. As séries A e B apresentam a mesma dispersão relativa, pois apresentam o mesmo coeficiente de variação.
c. As séries A e B apresentam a mesma dispersão, pois a disperșcao relativa prevalece sobre a dispersão absoluta.

Cap. 6 – Medidas de Assimetria e Curtose

INTRODUÇÃO
O que é SIMETRIA?
Uma distribuição de frequências é **simétrica** quando $\bar{X}$ = M_d = M_o.
Quando isto ocorre, a curva representativa da distribuição tem o formato:



Uma distribuição de frequências é **assimétrica** quando $\bar{X} \neq M_d \neq M_o$.
Quando isto ocorre, a curva representativa da distribuição tem o formato:



Assimetria negativa ou à esquerda Simétrica Assimetria positiva ou à direita

MEDIDAS DE ASSIMETRIA P.107

Temos duas medidas de assimetria (distorção ou skewness).

a. Coeficiente de Pearson
b. Coeficente de Bowley

COEFICIENTE PEARSON

É dado por:

$$A_s = \frac{\bar{X} - M_o}{\sigma(X)}$$

Se $A_s = 0$ ⇒ distribuição simétrica.

Se $A_s < 0$ ⇒ distribuição assimétrica negativa ou à esquerda.

Se $A_s > 0$ ⇒ distribuição assimétrica positiva ou à direita.

Segundo este critério, as distribuições são classificadas da seguinte forma:

Se $A_s \leq -1$ ⇒ assimétrica negativa forte.
Se $-1 < A_s < 0$ ⇒ assimétrica negativa fraca.
Se $A_s = 0$ ⇒ simétrica.
Se $0 < A_s < 1$ ⇒ assimétrica positiva fraca.
Se $A_s \geq 1$ ⇒ assimétrica positiva forte.

MEDIDAS DE ASSIMETRIA P.107

COEFICIENTE BOWLEY

É dado por:

$$A_s = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

Os valores do coeficiente ficam entre -1 e 1

Se $A_s = 0 \Rightarrow$ distribuição simétrica.

Se $A_s < 0 \Rightarrow$ distribuição assimétrica negativa ou à esquerda.

Se $A_s > 0 \Rightarrow$ distribuição assimétrica positiva ou à direita.

Segundo este critério, as distribuições são classificadas da seguinte forma:

Se $-1 \le A_s \le -0{,}3 \Rightarrow$ assimétrica negativa forte.
Se $-0{,}3 < A_s < -0{,}1 \Rightarrow$ assimétrica negativa moderada.
Se $-0{,}1 \le A_s < 0 \Rightarrow$ assimétrica negativa fraca.
Se $A_s = 0 \Rightarrow$ simétrica.
Se $0 < A_s \le 0{,}1 \Rightarrow$ assimétrica positiva fraca.
Se $0{,}1 < A_s < 0{,}3 \Rightarrow$ assimétrica positiva moderada.
Se $0{,}3 \le A_s \le 1 \Rightarrow$ assimétrica positiva forte.

MEDIDAS DE ASSIMETRIA – exemplo P. 110

Classifique, quanto à assimetria, a distribuiçãode frequências abaixo, segundo o coeficiente de Pearson.

População

x_i	f_i
1	2
2	10
3	6
4	4
5	2
6	1

SOLUÇÃO

x_i	f_i	x_if_i	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1	2	2	7,0688
2	10	20	7,7440
3	6	18	0,0864
4	4	16	5,0176
5	2	10	8,9888
6	1	6	9,7344
Σ	25	72	38,64

A moda será: $M_o = 2$.

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{72}{25} = 2{,}88$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$$\sigma^2(x) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{38{,}64}{25} = 1{,}5456$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{1{,}5456} = 1{,}243222 \approx 1{,}24$$

$$A_s = \frac{\bar{X} - M_o}{\sigma(X)} = \frac{2{,}88 - 2}{1{,}24} \approx 0{,}71$$

É uma distribuição assimétrica positiva fraca!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

IMES CATANDUVA·SP

1. Classifique, quanto à assimetria, a distribuiçãode frequências abaixo, segundo o coeficiente de Pearson.

População

x_i	f_i
2	2
3	4
4	6
5	10
6	6
7	4
8	2

SOLUÇÃO

x_i	f_i	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
2	2	4	18	4	8
3	4	12	16	9	36
4	6	24	6	16	96
5	10	50	0	25	250
6	6	36	6	36	216
7	4	28	16	49	196
8	2	16	18	64	128
Σ	34	170	80	203	930

Uma forma alternativa para calcular σ²(x)será: $\overline{x_i^2} - \bar{x}^2$

Na HP-12C, fazemos direto:

```
f Σ                  f Σ
4  ENTER 2 Σ+        2 ENTER 2 Σ+
9  ENTER 4 Σ+        3 ENTER 4 Σ+
16 ENTER 6 Σ+        4 ENTER 6 Σ+
25 ENTER 10 Σ+       5 ENTER 10 Σ+
36 ENTER 6 Σ+        6 ENTER 6 Σ+
49 ENTER 4 Σ+        7 ENTER 4 Σ+
64 ENTER 2 Σ+        8 ENTER 2 Σ+
g x̄w                 g x̄w  ...  5
...27,352941
```

$$\sigma^2(x) = \overline{x_i^2} - \bar{x}^2 = 27{,}352941 - 5^2 = 27{,}352941 - 25 = 2{,}352941$$

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{170}{34} = 5$ A moda será: $M_o = 5$. $\overline{x_i^2} = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{930}{34} = 27{,}352941$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$\sigma^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{80}{34} = 2{,}352941$ ou $\overline{x_i^2} - \bar{x}^2 = 27{,}352941 - 5^2 = 27{,}352941 - 25 = 2{,}352941$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{2{,}352941} = 1{,}533930 \approx 1{,}53$$

$$A_s = \frac{\bar{X} - M_o}{\sigma(X)} = \frac{5-5}{1{,}53} \approx 0{,}0$$

É uma distribuição simétrica!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

IMES CATANDUVA·SP

5. Classifique, quanto à assimetria, a distribuiçãode frequências abaixo, segundo o coeficiente de Pearson.

Amostra

classe	Int. cl.	f_i
1	0|-- 4	10
2	4|-- 8	15
3	8|-- 12	6
4	12|-- 16	2
5	16|--20	1

SOLUÇÃO

classe	Int. cl.	f_i	F_{acum}	x_i	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$
1	0|-- 4	10	10	2	20	189,480969
2	4|-- 8	15	25	6	90	1,868512
3	8|-- 12	6	31	10	60	79,806228
4	12|-- 16	2	33	14	28	116,955017
5	16|--20	1	34	18	18	135,653979
Σ		34			216	523,764705

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{216}{34} = 6{,}352941$

A moda será: $M_0 = l_i^* + \frac{D_1}{D_1 + D_2} h = 4 + \frac{(15-10)}{(15-10)+(15-6)} x 4 = 4 + \frac{5}{5+9} x 4 = 4 + 1{,}43 = 5{,}43$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$$s^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i - 1} = \frac{523{,}764705}{33} = 15{,}87$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2(x)} = \sqrt{15{,}87} = 3{,}983925 \approx 3{,}98$$

$$A_s = \frac{\bar{X} - M_o}{\sigma(X)} = \frac{6{,}35 - 5{,}43}{3{,}98} = 0{,}23 \approx 0{,}09$$

É uma distribuição assimétrica positiva fraca!!!!!

MEDIDAS DE ASSIMETRIA – exemplo P. 110

Classifique, quanto à assimetria, a distribuição de frequências abaixo, segundo o coeficiente de Bowley.
População

classe	Int. cl.	f_i
1	0|-- 2	2
2	2|-- 4	5
3	4|-- 6	12
4	6|-- 8	15
5	8|--10	1

SOLUÇÃO

Cálculo de Q_3:
E_{Q3} = (3x35)/4 = 26,25. Isto nos dá a posição de Q_3 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 26,25 é a 4ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_3 = l_{inf} + \frac{E_{Q3} - F_{ant}}{f_i} h = 6 + \frac{26{,}25 - 19}{15} .2 = 6{,}97$$

classe	Int. cl.	f_i	F_{acum}
1	0|-- 2	2	2
2	2|-- 4	5	7
3	4|-- 6	12	19
4	6|-- 8	15	34
5	8|--10	1	35
Σ		35	

Cálculo de Q_1: E_{Q1} = (1x35)/4 = 8,75. Isto nos dá a posição de Q_1 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 8,75 é a 3ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_1 = l_{inf} + \frac{E_{Q1} - F_{ant}}{f_i} h = 4 + \frac{8{,}75 - 7}{12} .2 = 4{,}29$$

Cálculo de M_d: E_{Q2} = (2x35)/4 = 17,50. Isto nos dá a posição de M_d na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 17,50 é a 3ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$M_d = l_{inf} + \frac{E_{Q2} - F_{ant}}{f_i} h = 4 + \frac{17{,}50 - 7}{12} .2 = 5{,}75$$

Substituindo-se estes valores, obtém-se:

$$A_s = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1} = \frac{6{,}97 + 4{,}29 - 2x5{,}75}{6{,}97 - 4{,}29} = -0{,}09$$

A distribuição é assimétrica negativa fraca!!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

3. Classifique, quanto à assimetria, a distribuição de frequências abaixo, segundo o coeficiente de Bowley.
População

x_i	f_i
5	1
6	7
7	10
8	10
9	2
10	2
11	1

SOLUÇÃO

x_i	f_i	F_{acum}
5	1	1
6	7	8
7	10	18
8	10	28
9	2	30
10	2	32
11	1	33
Σ	33	

$$E_{Q_i} = \frac{i * n}{4}$$

E_{Q1} = (1x33)/4 = 8,25. Como não é inteira, significa que o Q_1 é um elemento compreendido entre a 8ª e a 9ª posição. Pela $F_{acumulada}$, a 8ª é o 6 e o 9º é o 7. Logo, Q_1 = 6,5.

E_{Q3} = (3x33)/4 = 24,75. Como não é inteira, significa que o Q_3 é um elemento compreendido entre a 24ª e a 25ª posição. Pela $F_{acumulada}$, a 24ª é o 8 e o 25º é o 8, também. Logo, Q_3 = 8.

Md = E_{Q2} = (2x33)/4 = 16,50. Como não é inteira, significa que a Md = Q_2 é um elemento compreendido entre a 16ª e a 17ª posição. Pela $F_{acumulada}$, a 16ª é o 7 e a 17º é o 7, também. Logo, Md = Q_2 = 7.

Substituindo-se estes valores, obtém-se:

$$A_s = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1} = \frac{8 + 6{,}5 - 2x7}{8 - 6{,}5} = 0{,}333333$$

A distribuição é assimétrica positiva forte!!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

7. Classifique, quanto à assimetria, a distribuiçãode frequências abaixo, segundo o coeficiente de Bowley.

Amostra

classe	Int. cl.	f_i
1	3|-- 5	14
2	5|-- 7	16
3	7|-- 9	18
4	9|-- 11	19
5	11|--13	17

SOLUÇÃO

Cálculo de Q_3:

E_{Q3} = (3x84)/4 = 63. Isto nos dá a posição de Q_3 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 63 é a 4ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_3 = l_{inf} + \frac{E_{Q3} - F_{ant}}{f_i} h = 9 + \frac{63 - 48}{19} .2 = 10{,}579$$

classe	Int. cl.	f_i	F_{acum}
1	3|-- 5	14	14
2	5|-- 7	16	30
3	7|-- 9	18	48
4	9|-- 11	19	67
5	11|--13	17	84
Σ		84	

Cálculo de Q_1: E_{Q1} = (1x84)/4 = 21. Isto nos dá a posição de Q_1 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 21 é a 2ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_1 = l_{inf} + \frac{E_{Q1} - F_{ant}}{f_i} h = 5 + \frac{21 - 14}{16} .2 = 5{,}875$$

Cálculo de M_d: E_{Q2} = (2x84)/4 = 42. Isto nos dá a posição de M_d na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 42 é a 3ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$M_d = l_{inf} + \frac{E_{Q2} - F_{ant}}{f_i} h = 7 + \frac{42 - 30}{18} .2 = 8{,}33333$$

Substituindo-se estes valores, obtém-se:

$$A_s = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1} = \frac{10{,}579 + 5{,}875 - 2x8{,}33333}{10{,}579 - 5{,}875} = \frac{-0{,}212667}{4{,}704} = -0{,}045210$$

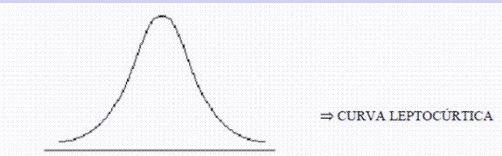
A distribuição é assimétrica negativa fraca!!!!!!

MEDIDAS DE CURTOSE P.108

Também chamadas de medidas de achatamento e *kurtosis*, caracterizam o ACHATAMENTO da curva de distribuição de frequências em torno da MODA.

1º CASO

Os dados estão fortemente concentrados em torno da moda, o que faria a curva de frequência ser bastante afilada, como na figura

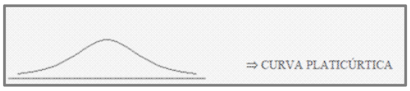


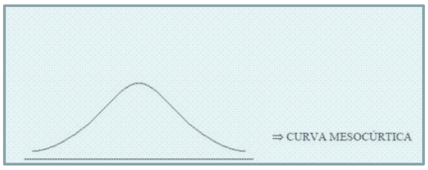
2º CASO

Os dados estão razoavelmente concentrados em torno da moda, o que faria a curva de frequência ser razoavelmente afilada, como na figura

3º CASO

Os dados estão fracamente concentrados em torno da moda, o que faria a curva de frequência ser pouco afilada, como na figura





MEDIDAS DE CURTOSE P.109

Para classificar uma distribuição de frequências quanto a sua curtose, podemos utilizar o coeficiente de curtose dado por:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3$$

O numerador é chamado de 4º Momento Central

Se K = 0 ⇒ distribuição mesocúrtica.

Se K > 0 ⇒ distribuição leptocúrtica.

Se K < 0 ⇒ distribuição platicúrtica.

Observações:

1. O valor 3, que figura na fórmula de K, representa o valor da curtose para uma distribuição teórica de probabilidades chamada distribuição normal padrão, que caracteriza a distribuição mesocúrtica. Será estudada posteriormente.

   Se uma distribuição apresenta,

$$\frac{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} = 3$$

   Ela é mesocúrtica e consequententemente K = 0

2. A medida da curtose tem a finalidade de complementar a caracterização da dispersão em uma distribuição.

MEDIDAS DE CURTOSE – exemplo P. 112

Classifique, quanto à curtose, a distribuição de frequências abaixo:

População

classe	Int. cl.	f_i
1	3|-- 5	1
2	5|-- 7	2
3	7|-- 9	13
4	9|-- 11	3
5	11|--13	1

SOLUÇÃO

classe	Int. cl.	f_i	x_i	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
1	3|-- 5	1	4	4	16,81	282,5761
2	5|-- 7	2	6	12	8,82	38,8962
3	7|-- 9	13	8	104	0,13	0,0013
4	9|-- 11	3	10	30	10,83	39,0963
5	11|--13	1	12	12	15,21	231,3441
Σ		20		162	51,8	591,914

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{162}{20} = 8{,}1$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$\sigma^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{51{,}8}{20} = 2{,}59 \Rightarrow \sigma^4(x) = [\sigma^2(x)]^2 = [2{,}59]^2 = 6{,}7081$

Cálculo de

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i} = \frac{591{,}914}{20} = 29{,}5957$$

Substituindo-se estes valores na fórmula do K, temos:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3 = \frac{29{,}5957}{6{,}7081} - 3 = \mathbf{1{,}41}$$

Como K > 0 a distribuição de frequências é leptocúrtica!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

2. Classifique, quanto à curtose, a distribuição de frequências abaixo:

População

x_i	f_i
2	2
3	4
4	6
5	10
6	6
7	4
8	2

SOLUÇÃO

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
2	2	4	18	162
3	4	12	16	64
4	6	24	6	6
5	10	50	0	0
6	6	36	6	6
7	4	28	16	64
8	2	16	18	162
Σ	34	170	80	464

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{170}{34} = 5{,}00$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$\sigma^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{80}{34} = 2{,}352941 \Rightarrow \sigma^4(x) = [\sigma^2(x)]^2 = [2{,}352941]^2 = 5{,}536332$

Cálculo de

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i} = \frac{464}{34} = 13{,}647059$$

Substituindo-se estes valores na fórmula do K, temos:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3 = \frac{13{,}647059}{5{,}536332} - 3 = \mathbf{-0{,}535}$$

Como K < 0 a distribuição de frequências é platicúrtica!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

4. Classifique, quanto à curtose, a distribuição de frequências abaixo:

Amostra

x_i	f_i
5	1
6	7
7	10
8	10
9	2
10	2
11	1

SOLUÇÃO

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{246}{33} =$ 7,454545

x_i	f_i	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
5	1	5	6,024793	36,298135
6	7	42	14,809917	31,333379
7	10	70	2,066116	0,426883
8	10	80	2,975207	0,885185
9	2	18	4,776860	11,409193
10	2	20	12,958678	83,963664
11	1	11	12,570248	158,011133
Σ	33	246	56,181819	322,327572

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$\sigma^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{56{,}181819}{33} = 1{,}702479 \Rightarrow \sigma^4(x) = [\sigma^2(x)]^2 = [1{,}702479]^2 = 2{,}898436$

Cálculo de

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i} = \frac{322{,}327572}{33} = 9{,}767502$$

Substituindo-se estes valores na fórmula do K, temos:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3 = \frac{9{,}767502}{2{,}898436} - 3 = \mathbf{0{,}369922}$$

Como K > 0 a distribuição de frequências é leptocúrtica!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

6. Classifique, quanto à curtose, a distribuição de frequências abaixo:

Amostra

classe	Int. cl.	f_i
1	0|-- 4	10
2	4|-- 8	15
3	8|-- 12	6
4	12|-- 16	2
5	16|--20	1

SOLUÇÃO

classe	Int. cl.	f_i	x_i	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
1	0|-- 4	10	2	20	189,480969	3.590,303761
2	4|-- 8	15	6	90	1,868512	0,232756
3	8|-- 12	6	10	60	79,806228	1.061,505671
4	12|-- 16	2	14	28	116,955017	6.839,238000
5	16|--20	1	18	18	135,653979	18.402,00202
Σ		34		216	523,764705	29.893,28221

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{216}{34} = 6{,}352941$

A variância se os dados representam uma POPULAÇÃO será:

$s^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i - 1} = \frac{523{,}764705}{33} = 15{,}871658 \Rightarrow s^4(x) = [s^2(x)]^2 = [15{,}871658]^2 = 251{,}909519$

Cálculo de

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i - 1} = \frac{29893{,}28221}{33} = 905{,}857037$$

Substituindo-se estes valores na fórmula do K, temos:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3 = \frac{905{,}857037}{251{,}909519} - 3 = \mathbf{0{,}595962}$$

Como K > 0 a distribuição de frequências é leptocúrtica!!!!!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS – p. 115

8. Classifique, quanto à curtose, a distribuição de frequências abaixo:

Amostra

classe	Int. cl.	f_i
1	3|-- 5	14
2	5|-- 7	16
3	7|-- 9	18
4	9|-- 11	19
5	11|--13	17

SOLUÇÃO

classe	Int. cl.	f_i	x_i	x_if_i	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$	$(x_i-\bar{x})^4 f_i$
1	3|-- 5	14	4	56	248,642857	4.415,947886
2	5|-- 7	16	6	96	78,448980	384,640150
3	7|-- 9	18	8	144	0,826531	0,037953
4	9|-- 11	19	10	190	60,586735	193,197496
5	11|--13	17	12	204	243,637755	3.491,726810
Σ		84		690	632,142858	8.485,550295

A média será: $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{690}{84} = 8{,}214286$

A variância se os dados representam uma AMOSTRA será:

$s^2(x) = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2 f_i}{\sum f_i - 1} = \frac{632{,}142858}{83} = 7{,}616179 \Rightarrow s^4(x) = [s^2(x)]^2 = [7{,}616179]^2 = 58{,}006183$

Cálculo de

$$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i - 1} = \frac{8.485{,}550295}{83} = 102{,}235546$$

Substituindo-se estes valores na fórmula do K, temos:

$$K = \frac{\frac{\sum (x_i-\bar{x})^4 f_i}{\sum f_i}}{\sigma^4(x)} - 3 = \frac{102{,}235546}{58{,}006183} - 3 = \mathbf{-1{,}237506}$$

Como K < 0 a distribuição de frequências é platicúrtica!!!!!

Momentos de uma distribuição de freqüências

Definimos o momento de ordem *t* de um conjunto de dados como:

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^t}{N}$$

Definimos o momento de ordem *t* centrado em relação a uma constante *a* como

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^t}{N}$$

Especial interesse tem o caso do momento centrado em relação a , dado por:

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^t}{N}$$

Mais Momentos

Conforme já vimos nos casos da média e da variância, as expressões precedentes podem ser reescritas levando-se em consideração as freqüências dos diferentes valores existentes. Temos então respectivamente,

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i)^t . f_i}{N}$$

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - a)^t . f_i}{N}$$

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^t . f_i}{N}$$

É fácil ver que $M_1 = \bar{x}$; $m_1 = 0$; $m_2 = \sigma^2$.