

EXERCÍCIOS SOBRE SEPARATRIZES

(Extraídos do livro texto do Medeiros p. 77 a 80)

1. Em uma série ordenada, qual é o percentual de elementos que ficam à esquerda de cada uma das medidas separatrizes:

a. D_1 b. Q_1 c. K_1 d. D_2 e. K_3 f. Q_3 g. K_4 h. Q_2 i. D_8 j. P_{70}

Solução

D_1 - representa o 1º decil, portanto, temos que 10% dos elementos ficam à sua esquerda.

Q_1 - representa o 1º quartil, portanto, temos que 25% dos elementos ficam à sua esquerda.

K_1 - representa o 1º quintil, portanto, temos que 20% dos elementos ficam à sua esquerda.

D_2 - representa o 2º decil, portanto, temos que 20% dos elementos ficam à sua esquerda.

K_3 - representa o 3º quintil, portanto, temos que 60% dos elementos ficam à sua esquerda.

Q_3 - representa o 3º quartil, portanto, temos que 75% dos elementos ficam à sua esquerda.

K_4 - representa o 4º quintil, portanto, temos que 80% dos elementos ficam à sua esquerda.

Q_2 - representa o 2º quartil, portanto, temos que 50% dos elementos ficam à sua esquerda.

D_8 - representa o 8º decil, portanto, temos que 80% dos elementos ficam à sua esquerda.

P_{70} - representa o 70º percentil, portanto, temos que 70% dos elementos ficam à sua esquerda.

2. Em uma série ordenada, qual é o percentual de elementos que ficam à direita de cada uma das medidas separatrizes:

a. D_4 b. P_{80} c. Q_3 d. K_2 e. P_{20} f. D_5 g. Q_1
h. P_2

Solução

D_4 - representa o 4º decil, portanto, temos que 60% dos elementos ficam à sua direita.

P_{80} - representa o 80º percentil, portanto, temos que 20% dos elementos ficam à sua direita.

Q_3 - representa o 3º quartil, portanto, temos que 25% dos elementos ficam à sua direita.

K_2 - representa o 2º quintil, portanto, temos que 60% dos elementos ficam à sua direita.

P_{20} - representa o 20º percentil, portanto, temos que 80% dos elementos ficam à sua direita.

D_5 - representa o 5º decil, portanto, temos que 50% dos elementos ficam à sua direita.

Q_1 - representa o 1º quartil, portanto, temos que 75% dos elementos ficam à sua direita.

P_2 - representa o 2º percentil, portanto, temos que 98% dos elementos ficam à sua direita.

3. Qual é o percentual de elementos de uma série ordenada que se situa entre:

- a. Q_1 e Q_3 b. P_{10} e P_{90} c. D_2 e D_6 d. Q_1 e K_3 e. D_3 e K_4
 f. K_2 e D_8 g. K_3 e Q_3

Solução

Q_1 e Q_3 - representa o intervalo interquartil de 50% (=75% - 25%).

P_{10} e P_{90} - representa o percentual de 80% dos elementos da série.

D_2 e D_6 - representa o percentual de 40% dos elementos da série.

Q_1 e K_3 - representa o percentual de 35% (=60% - 25%) dos elementos da série.

D_3 e K_4 - representa o percentual de 50% (80% - 30%) dos elementos da série.

K_2 e D_8 - representa o percentual de 40 (80% - 40%) dos elementos da série.

K_3 e Q_3 - representa o percentual de 15% (75% - 60%) dos elementos da série.

4. Se uma série ordenada possui 180 elementos, dê o número aproximado de elementos que se situam:

- a. acima do P_{20} b. abaixo do K_3 c. acima do Q_3 d. abaixo do P_{90}
 e. entre o P_{10} e P_{80} f. entre o Q_1 e Q_3 g. entre Q_3 e P_{80} h. entre P_{90} e P_{92}

Solução

A posição do percentil é dada por $E_{P_i} = (i \cdot n)/100$

$E_{P_{20}} = (20 \times 180)/100 = 36^{\text{a}}$ posição. Logo, temos 144 elementos acima desta posição.

$E_{K_3} = (3 \times 180)/5 = 108^{\text{a}}$ posição. Logo, temos 108 elementos abaixo desta posição.

$E_{Q_3} = (3 \times 180)/4 = 135^{\text{a}}$ posição. Logo, temos 45 elementos acima desta posição.

$E_{P_{90}} = (90 \times 180)/100 = 162^{\text{a}}$ posição. Logo, temos 162 elementos acima desta posição.

$E_{P_{10}} = (10 \times 180)/100 = 18$ e $E_{P_{80}} = (80 \times 180)/100 = 144$. Logo entre as posições 18^{a} e 144^{a} , temos 126 elementos.

$E_{Q_1} = (1 \times 180) / 4 = 45$ e $E_{Q_3} = (3 \times 180) / 4 = 135$. Logo entre as posições 45ª e 135ª, temos 90 elementos.

$E_{Q_3} = (3 \times 180) / 4 = 135$ e $E_{P_{80}} = (80 \times 180) / 100 = 144$. Logo entre as posições 135ª e 144ª, temos 9 elementos.

$E_{P_{90}} = (90 \times 180) / 100 = 162$ e $E_{P_{92}} = (92 \times 180) / 100 = 165,6$. Logo entre as posições 162ª e 166ª (arredondando), temos 4 elementos.

5. Dada a série X: 3, 15, 6, 9, 10, 4, 12, 15, 17, 20, 29, calcule:

- a. Q_1 b. K_2 c. D_4 d. Q_3 e. P_{90}

Solução

Primeiramente formemos o ROL: 3, 4, 6, 9, 10, 12, 15, 15, 17, 20, 29

$E_{Q_1} = (1 \times 11) / 4 = 2,75$. Esta posição não é inteira, significa que o Q_1 é um valor compreendido entre o 2º e o 3º elemento da série. O 2º é o 4 e o 3º é o 6. Tirando a média, temos 5. Assim, temos que 25% dos valores da série são menores ou iguais a 5 e 75% são maiores ou iguais a 5.

$E_{K_2} = (2 \times 11) / 5 = 4,40$. Esta posição não é inteira, significa que o K_2 é um valor compreendido entre o 4º e o 5º elemento da série. O 4º é o 9 e o 5º é o 10. Tirando a média, temos 9,5. Assim, temos que 40% dos valores da série são menores ou iguais a 9,5 e 60% são maiores ou iguais a 5.

$E_{D_4} = (4 \times 11) / 10 = 4,40$. Esta posição não é inteira, significa que o D_4 é um valor compreendido entre o 4º e o 5º elemento da série. O 4º é o 9 e o 5º é o 10. Tirando a média, temos 9,5. Assim, temos que 40% dos valores da série são menores ou iguais a 9,5 e 60% são maiores ou iguais a 5.

$E_{Q_3} = (3 \times 11) / 4 = 8,25$. Esta posição não é inteira, significa que o Q_3 é um valor compreendido entre o 8º e o 9º elemento da série. O 8º é o 15 e o 9º é o 17. Tirando a média, temos 16. Assim, temos que 75% dos valores da série são menores ou iguais a 16 e 25% são maiores ou iguais a 16.

$E_{P_{90}} = (90 \times 11) / 100 = 9,90$. Esta posição não é inteira, significa que o P_{90} é um valor compreendido entre o 9º e o 10º elemento da série. O 9º é o 17 e o 10º é o 20. Tirando a média, temos 18,5. Assim, temos que 90% dos valores da série são menores ou iguais a 18,5 e 10% são maiores ou iguais a 18,5.

6. A distribuição de frequência abaixo representa idade de 50 alunos de uma classe de primeiro ano de uma Faculdade:

Idade (anos)	Nº de alunos
17	3
18	18
19	17
20	8
21	4

Calcule:

- a. Q_1 b. K_2 c. D_4 d. Q_3 e. P_{90}

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas

Idade (anos)	Nº de alunos	F _{acumulada}
17	3	3
18	18	21
19	17	38
20	8	46
21	4	50

$E_{Q_1} = (1 \times 50) / 4 = 12,50$. Como não é inteira, significa que o Q_1 é um elemento compreendido entre a 12ª e a 13ª posição. Pela $F_{acumulada}$, o 12ª é o 18 e o 13º é o 18, também. Logo, $Q_1 = 18$ anos.

$E_{K_2} = (2 \times 50) / 5 = 20$. Significa que o K_2 é o elemento na 20ª posição. Pela $F_{acumulada}$, o elemento da 20ª posição é o 18. Logo, $K_2 = 18$ anos.

$E_{D_4} = (4 \times 50) / 10 = 20$. Significa que o K_2 é o elemento na 20ª posição. Pela $F_{acumulada}$, o elemento da 20ª posição é o 18. Logo, $K_2 = 18$ anos.

$E_{Q_3} = (3 \times 50) / 4 = 37,5$. Como não é inteira, significa que o Q_3 é um elemento compreendido entre a 37ª e a 38ª posição. Pela $F_{acumulada}$, o 37ª é o 19 e o 38º é o 19, também. Logo, $Q_3 = 19$ anos.

$E_{P_{90}} = (90 \times 50) / 100 = 45$. Significa que o P_{90} é o elemento na 45ª posição. Pela $F_{acumulada}$, o elemento da 45ª posição é o 20. Logo, $P_{90} = 20$ anos.

7. A distribuição de frequência abaixo representa o consumo por nota de 54 notas fiscais emitidas durante um dia em uma loja de departamentos.

Classe	Consumo por nota US\$	Nº de notas
1	0 -- 50	10
2	50 -- 100	28
3	100 -- 150	12
4	150 -- 200	2
5	200 -- 250	1
6	250 -- 300	1

Calcule:

a. Q_1 b. K_2 c. D_3 d. Q_3 e. D_7 f. P_{98}

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas

Classe	Consumo por nota US\$	Nº de notas	F _{acum}
1	0 -- 50	10	10
2	50 --100	28	38
3	100 --150	12	50
4	150 --200	2	52
5	200 --250	1	53
6	250 --300	1	54

$E_{Q_1} = (1 \times 54) / 4 = 13,5$. Isto nos dá a posição de Q_1 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 13,5 é a 2ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_1 = l_{inf} + \frac{E_{Q_1} - F_{ant}}{f_i} h = 50 + \frac{13,5 - 10}{28} \cdot 50 = 56,5$$

$E_{K_2} = (2 \times 54) / 5 = 21,60$. Isto nos dá a posição de K_2 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 21,60 é a 2ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$K_2 = l_{inf} + \frac{E_{K_2} - F_{ant}}{f_i} h = 50 + \frac{21,60 - 10}{28} \cdot 50 = 70,71$$

$E_{D_3} = (3 \times 54) / 10 = 16,2$. Isto nos dá a posição de D_3 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 16,2 é a 2ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$D_3 = l_{inf} + \frac{E_{D_3} - F_{ant}}{f_i} h = 50 + \frac{16,2 - 10}{28} \cdot 50 = 61,07$$

Respostas:

d. 110,42 e. 99,64 f. 246

8. Interprete os valores obtidos no problema anterior.

Solução

- 25% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 56,25 e 75% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 56,25
- 40% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 70,71 e 60% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 70,71
- 30% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 61,07 e 70% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 61,07
- 75% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 110,42 e 25% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 110,42
- 70% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 99,64 e 75% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 99,64
- 98% das notas indicavam consumo menor ou igual a US\$ 246,00 e 2% indicavam consumo maior ou igual a US\$ 246,00

9. Tomando como amostra a tabela do problema 7 apresentada novamente abaixo, o gerente desta loja de departamentos decidiu premiar a nível promocional com um brinde, 10% dos fregueses que mais consumirem, nos próximos 30 dias. A partir de qual valor de consumo da nota fiscal os clientes seriam premiados?

Classe	Consumo por nota US\$	Nº de notas
1	0 -- 50	10
2	50 --100	28
3	100 --150	12
4	150 --200	2
5	200 --250	1
6	250 --300	1

Solução

Os 10% dos clientes que mais consumirem serão aqueles cujo consumo seja superior a D_9 .

Classe	Consumo por nota US\$	Nº de notas	F _{acum}
1	0 -- 50	10	10
2	50 --100	28	38
3	100 --150	12	50
4	150 --200	2	52
5	200 --250	1	53
6	250 --300	1	54

$E_{D_9} = (9 \times 54) / 10 = 48,60$. Isto nos dá a posição de D_9 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 48,60 é a 3ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$D_9 = l_{inf} + \frac{E_{D_9} - F_{ant}}{f_i} h = 100 + \frac{48,60 - 38}{12} \cdot 50 = 144,17$$

A partir do valor de consumo de R\$ 144,17, os clientes seriam premiados!!!

10. Uma empresa estabelece o salário de seus vendedores com base na produtividade. Desta forma, 10% é fixo e 90% são comissões sobre a venda. Uma amostra de salários mensais nesta empresa revelou o quadro abaixo. Se a empresa decidir, à nível de incentivo, fornecer uma cesta básica para 5% dos vendedores que pior desempenho tiveram durante o próximo mês com base nesta amostra, qual será o maior salário que receberá esta cesta básica

Classe	Salários US\$	Nº de vendedores
1	70 -- 120	8
2	120 --170	28
3	170 --220	54
4	220 --270	32
5	270 --320	12
6	320 --370	6

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas

Classe	Salários US\$	Nº de vend.	F _{acum}
1	70 --120	8	8
2	120 --170	28	36
3	170 --220	54	90
4	220 --270	32	122
5	270 --320	12	134
6	320 --370	6	140

Estamos querendo premiar os 5% piores vendedores, isto é, queremos o P_5 para premiarmos os salários abaixo daquele valor.

$E_{P_5} = (5 \times 140) / 100 = 7,00$. Isto nos dá a posição de P_5 na série. A classe que contém o elemento que ocupa a posição 7,00 é a 1ª classe. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$P_5 = l_{inf} + \frac{E_{P_5} - F_{ant}}{f_i} h = 70 + \frac{7,00 - 0}{8} \cdot 50 = 113,75$$

A empresa premiará com incentivo da cesta básica todos aqueles funcionários que conseguirem um salário abaixo a R\$ 113,75.

11. A tabela abaixo representa a venda de livros didáticos em uma editora na primeira semana de março.

Determine: a. Q_1 b. Q_3 c. P_{90} d. P_{10}

Classe	Preço Unitário US\$	Nº de livros vendidos
1	0 -- 10	4.000
2	10 --20	13.500
3	20 --30	25.600
4	30 --40	43.240
5	40 --50	26.800
6	50 --60	1.750

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas

Classe	Preço Unitário US\$	Nº de livros vendidos	F _{acum}
1	0 -- 10	4.000	4.000
2	10 -- 20	13.500	17.500
3	20 -- 30	25.600	43.100
4	30 -- 40	43.240	86.340
5	40 -- 50	26.800	113.140
6	50 -- 60	1.750	114.890

$E_{Q_1} = (1 \times 114890) / 4 = 28.722,5$. Isto nos dá a posição de Q_1 na 3ª classe da série. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_1 = l_{inf} + \frac{E_{Q_1} - F_{ant}}{f_i} h$$

$$= 20 + \frac{28722,5 - 17500}{25600} \cdot 10$$

$$= 24,38$$

$E_{Q_3} = (3 \times 114890) / 4 = 86.167,5$. Isto nos dá a posição de Q_3 na 4ª classe da série. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$Q_3 = l_{inf} + \frac{E_{Q_3} - F_{ant}}{f_i} h = 30 + \frac{86167,5 - 43100}{43240} \cdot 10 = 39,96$$

$E_{P_{90}} = (90 \times 114890) / 100 = 103.401$. Isto nos dá a posição de P_{90} na 5ª classe da série. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$P_{90} = l_{inf} + \frac{E_{P_{90}} - F_{ant}}{f_i} h = 40 + \frac{103401 - 86340}{26800} \cdot 10 = 46,37$$

$E_{P_{10}} = (10 \times 114890) / 100 = 11.489$. Isto nos dá a posição de P_{10} na 2ª classe da série. Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$P_{10} = l_{inf} + \frac{E_{P_{10}} - F_{ant}}{f_i} h = 10 + \frac{11489 - 4000}{13500} \cdot 10 = 15,55$$

12. Interprete os valores obtidos no problema anterior.

Solução

- 25% dos livros vendidos tinham preço unitário menor ou igual a US\$ 24,38 e 75% dos livros vendidos tinham preço unitário maior ou igual a US\$ 24,38
- 75% dos livros vendidos tinham preço unitário menor ou igual a US\$ 39,96 e 25% dos livros vendidos tinham preço unitário maior ou igual a US\$ 39,96
- 90% dos livros vendidos tinham preço unitário menor ou igual a US\$ 46,37 e 10% dos livros vendidos tinham preço unitário maior ou igual a US\$ 46,37
- 10% dos livros vendidos tinham preço unitário menor ou igual a US\$ 15,55 e 90% dos livros vendidos tinham preço unitário maior ou igual a US\$ 15,55

13. A tabela a seguir representa o número de faltas anuais dos funcionários de uma empresa.

Determine: a. D_3 b. K_3 c. P_{90} d. Q_3 e. Q_1 f. P_{10}

Nº de faltas	Nº de empregados
0	20
1	42
2	53
3	125
4	84
5	40
6	14
7	3
8	2

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas:

Nº de faltas	Nº de empregados	F _{acum}
0	20	20
1	42	62
2	53	115
3	125	240
4	84	324
5	40	364
6	14	378
7	3	381
8	2	383

- a. $E_{D_3} = (3 \times 383) / 10 = 114,9$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor D_3 está compreendido entre as posições 114^a (53) e 115^a (53). A média é 53 (2 faltas). Logo 30% dos empregados tiveram 2 faltas ou menos e 70% dos empregados 2 faltas ou mais.
- b. $E_{K_3} = (3 \times 383) / 5 = 229,8$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor K_3 está compreendido entre as posições 229^a (125) e 230^a (125). A média é 125 (3 faltas). Logo 60% dos empregados tiveram 3 faltas ou menos e 40% dos empregados tiveram 3 faltas ou mais.
- c. $E_{P_{90}} = (90 \times 383) / 100 = 344,7$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor P_{90} está compreendido entre as posições 344^a (40) e 345^a (40). A média é 40 (5 faltas). Logo 90% dos empregados tiveram 5 faltas ou menos e 10% dos empregados tiveram 5 faltas ou mais.
- d. $E_{Q_3} = (3 \times 383) / 4 = 287,25$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor Q_3 está compreendido entre as posições 287^a (84) e 288^a (84). A média é 84 (4 faltas). Logo 75% dos empregados tiveram 4 faltas ou menos e 25% dos empregados tiveram 4 faltas ou mais.
- e. $E_{Q_1} = (1 \times 383) / 4 = 95,75$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor Q_1 está compreendido entre as posições 95^a (53) e 96^a (53). A média é 53 (2 faltas). Logo 25% dos empregados tiveram 2 faltas ou menos e 75% dos empregados tiveram 2 faltas ou mais.
- f. $E_{P_{10}} = (10 \times 383) / 100 = 38,3$. Como é uma posição NÃO inteira, o valor P_{10} está compreendido entre as posições 38^a (42) e 39^a (42). A média é 42 (1 falta). Logo 10% dos empregados tiveram 1 falta ou menos e 90% dos empregados tiveram 1 falta ou mais.

14. Interprete os valores obtidos no problema anterior.

Solução

- 30% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 2 e 70% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 2
- 60% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 3 e 40% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 3
- 90% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 5 e 10% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 2
- 75% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 4 e 25% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 4
- 25% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 2 e 75% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 2
- 10% dos empregados tiveram um número de faltas anuais menor ou igual a 1 e 90% dos empregados tiveram um número de faltas anuais maior ou igual a 1

15. Uma amostra do tempo de vida útil de uma peça forneceu a distribuição abaixo:

Classe	Nº de horas (vida útil)	Nº de peças
1	0 -- 100	6
2	100 -- 200	42
3	200 -- 300	86
4	300 -- 400	127
5	400 -- 500	64
6	500 -- 600	8

Se o produtor deseja estabelecer uma garantia mínima para o número de horas de vida útil de uma peça, trocando a peça que não apresentar este número mínimo de horas, qual é a garantia, se ele está disposto a trocar 8% das peças.

Solução

Primeiramente montemos a coluna de frequências acumuladas. Queremos a vida útil inferior a 8%, ou seja, inferior ao P_8 :

Classe	Nº de horas (vida útil)	Nº de peças	F _{acum}
1	0 --100	6	6
2	100 --200	42	48
3	200 --300	86	134
4	300 --400	127	261
5	400 --500	64	325
6	500 --600	8	333

$E_{p8} = (8 \times 333) / 100 = 26,64$. Isto nos dá a posição de P_8 na 2ª classe da série.
Substituindo os valores indicados na fórmula, obtém-se:

$$P_8 = l_{inf} + \frac{E_{p8} - F_{ant}}{f_i} h = 100 + \frac{26,64 - 6}{42} \cdot 100 = 149,14 \text{ horas}$$

CONCLUSÃO: Para peças com vida útil inferior ou igual a 149,14 h, o produtor TROCARÁ a peça. Para peças com vida útil superior ou igual a 149,14 h, o produtor NÃO TROCARÁ a peça.