Variáveis Aleatórias

1. VARIÁVEL ALEATÓRIA

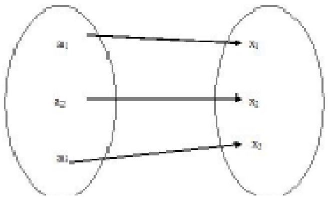
Suponhamos um espaço amostral S e que *cada ponto amostral* seja atribuído um *número*. Fica, então, definida uma *função* chamada **variável aleatória** X[1], com valores x_i[2].

Assim, se o espaço amostral relativo ao "lançamento simultâneo de duas moedas" é S = {(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)} e se X representa "o número de caras que aparecem, a cada ponto amostral podemos associar um número para X, de acordo com a Tabela 1.

TABELA 1

Ponto Amostral	X
(Ca, Ca)	2
(Ca, Co)	1
(Co, Ca)	1
(Co, Co)	0

Uma *variável aleatória* é qualquer função que associa a cada elemento do espaço amostral S um valor numérico.



As variáveis aleatórias (v.a.) podem ser classificadas em: **discretas** (se assumir valores num conjunto enumerável com certa probabilidade) e **contínua** (se seu conjunto de for de quaisquer intervalos de valores de números reais, o que seria um conjunto não enumerável).

2. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Consideremos a *distribuição de freqüências* relativa ao número de acidentes diários em um estacionamento:

TABELA 2

Número de Acidentes	Frequências
0	22
1	5
2	2
3	1
	$\Sigma = 30$

Em um dia, a **probabilidade** de:

- Não ocorrer acidente é: $p = \frac{22}{30} = 0{,}73$
- Ocorrer um acidente é: $p = \frac{5}{30} = 0{,}17$
- Ocorrerem dois acidentes é: $p = \frac{2}{30} = 0{,}07$
- Ocorrerem três acidentes é: $p = \frac{1}{30} = 0{,}03$

Podemos, então, escrever:

TABELA 3

Número de Acidentes	PROBABILIDADE
0	0,73
1	0,17
2	0,07
3	0,03
	$\Sigma = 1{,}00$

Esta *tabela* é denominada **distribuição de probabilidade.**

Seja **X** uma variável aleatória que pode assumir os valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. A cada valor x_i correspondem pontos do espaço amostral. Associamos, então, *a cada valor* x_i a *probabilidade* p_i de ocorrência de tais pontos no espaço amostral.

Assim, temos:

$$\sum p_i = 1$$

Os valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e seus correspondentes $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ definem uma **distribuição de probabilidade.**

Notação: $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$, i = 1, 2, ...

Ou ainda ,

---

[1] indicada por uma letra maiúscula.
[2] indicados por letras minúsculas

X	x_1	x_2	x_3	...
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...

Assim, voltando à Tabela 1, temos:

TABELA 4

PONTO AMOSTRAL	X	P(X)
(Ca, Ca)	2	½ x ½ = 1/4
(Ca, Co)	1	½ x ½ = 1/4
(Co, Ca)	1	½ x ½ = 1/4 ¼ + ¼ = 2/4
(Co, Co)	0	½ x ½ = 1/4
	Σ = 1,00	

Logo, podemos escrever:

TABELA 5

Número de CARAS (X)	P(X)
2	1/4
1	2/4
0	1/4
	Σ = 1,00

Ao definir a distribuição de probabilidade, estabelecemos uma correspondência unívoca entre os valores da variável aleatória X e os valores da variável P. Esta correspondência define uma **função**; os valores x_i (i = 1, 2, 3, ..., n) formam o **domínio** da função e os valores p_i (i = 1, 2, 3, ..., n), o seu **conjunto imagem.**

Essa função, assim definida, é denominada **função probabilidade** e representada por:

$$\boxed{f(x) = P(X = x_i)}$$

A função $P(X = x_i)$ determina a **distribuição de probabilidade da variável aleatória X.**

Assim, ao lançarmos um dado, a variável aleatória X, definida por "pontos de um dado", pode tomar os valores 1, 2, 3, ..., 6.

Como a cada um destes valores está associada uma e uma só probabilidade de realização e $\Sigma P(x_i) = 1$, fica definida uma função de probabilidade, da qual resulta a seguinte **distribuição de probabilidade**:

TABELA 5

X	P(X)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
	Σ = 1

Para que uma função P(X = xi) = p(xi) seja uma distribuição de probabilidade, é necessário que:

1. $P(X = x_i) \geq 0$ e $P(X = x_i) \leq 1$
2. $\Sigma P(X = x_i) = 1$
3. $P(X = x) = p(x)$

3. ESPERANÇA MATEMÁTICA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

Um *valor esperado* é simplesmente uma média dos possíveis resultados pesados de acordo com a sua probabilidade de ocorrência, isto é:

$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + ... + x_nP(X = x_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

EXEMPLO:

Um comerciante espera vender um automóvel até sexta-feira. A expectativa de que venda na segunda-feira é de 50%. Na terça-feira é de 30%, na quarta-feira é de 10%, na quinta-feira e na sexta-feira de 5%. Seu lucro é de R$ 3.000 se vender na segunda-feira e diminui 40% a cada dia. Calcule o valor esperado de lucro deste negociante nesta venda

Solução:

L	3.000	1.800	1080	648	388,80
P(L= x_i)	0,50	0,30	0,10	0,05	0,05

E(L) = 3.000 x 0,50 + 1.800 x 0,30 + 1.080 x 0,10 + 648 x 0,05 + 388,88 x 0,05 = 2.199,84

Propriedades do Valor Esperado

Se a e b são constantes e **X** uma *variável aleatória*, então:

1. E(a) = a
2. E(bX) = bE(X)
3. E(X ± a) = E(X) ± a
4. E(a ± bX) = a ± bE(X)

EXERCÍCIO:

Um lojista mantém extensos registros das vendas diárias de certo aparelho. O quadro a seguir da o número x_i de aparelhos vendidos em uma semana e a respectiva probabilidade:

Número x_i	0	1	2	3	4	5
Probabilidade	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Se é de R$ 20,00 o lucro por unidade vendida, qual o lucro esperado nas vendas de uma semana?

4. VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

A *variância* da variável aleatória **X** é definida por:

$\sigma^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$

O *desvio padrão* (σ) é a raiz quadrada da variância:

$Dp(X) = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Propriedades

1. Var (X) > 0
2. Var (X ± a) = Var (X)
3. Var (bX) = b^2Var (X)
4. Var (a ± bX) = b^2Var (X)

1. Dp(X) > 0
2. Dp(X ± a) = Dp(X)
3. Dp(bX) = $|b|$Dp(X)
4. Dp(a ± bX) = $|b|$Dp(X)

Tabela . Expressões para cálculo da média, variância e desvio-padrão de uma variável aleatória.

Média	$\mu=\sum x\, P(x)$
Variância	$\sigma^2=\sum[(x-\mu)^2\, P(x)]$
Variância	$\sigma^2=[\sum x^2\, P(x)] - \mu^2$
Desvio-Padrão	$\sigma=([\sum x^2\, P(x)] - \mu^2)^{1/2}$

EXEMPLO: (extraído de Triola, 1998, pag 96)

Na tabela abaixo são fornecidas as probabilidades de ocorrências de um determinado evento. Entretanto, o objetivo da mesma é enfatizar o cálculo da média, da variância e do desvio-padrão. Juntamente com a tabela será mostrado o histograma de probabilidades.

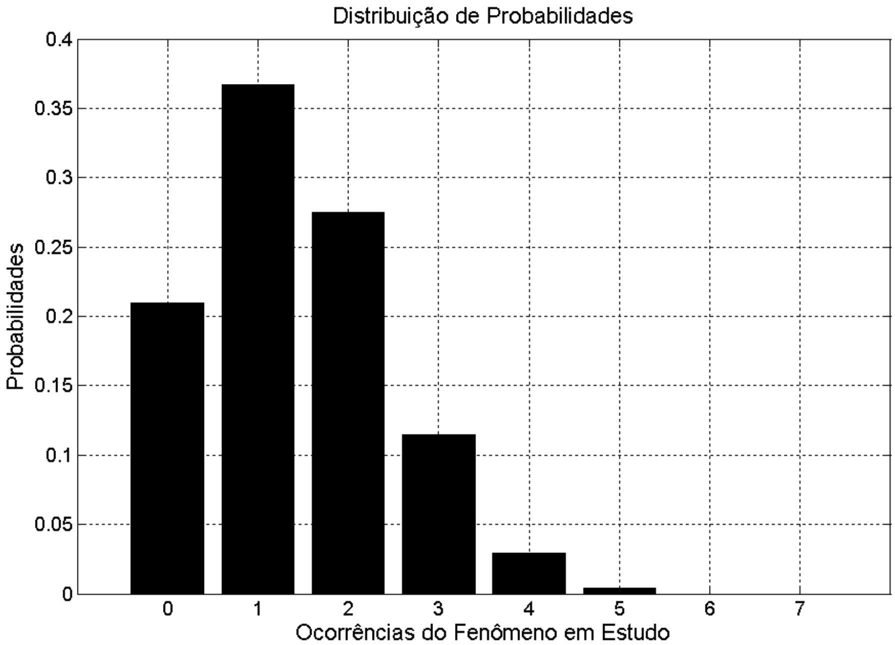
Tabela. Cálculo da média, variância e desvio-padrão para uma distribuição de probabilidades.

X	P(x)	x P(x)	x^2	x^2 P(x)
0	0,210	0,000	0	0,000
1	0,367	0,367	1	0,367
2	0,275	0,550	4	1,100
3	0,115	0,345	9	1,035
4	0,029	0,116	16	0,464
5	0,004	0,020	25	0,100
6	0	0,000	36	0,000
7	0	0,000	49	0,000
Total	**1,000**	**1,398**	**-**	**3,066**

$$\mu=\sum x \ P(x) = 1{,}398 = 1{,}4$$

$$\sigma^2=[\sum x^2 \, P(x)] - \mu^2 = 3{,}066-1{,}398^2 = 1{,}111596 = 1{,}1$$

$$\sigma=(1{,}111596)^{1/2} = 1{,}054323 = 1{,}1$$



3. VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

Variável aleatória contínua é aquela que pode assumir inúmeros valores num intervalo de números reais e é medida numa escala contínua. Por exemplo, uma variável aleatória contínua deve ser definida entre os números reais 0 e 1, ou números reais não negativos ou, para algumas distribuições, qualquer número real. A temperatura, a pressão, a precipitação ou qualquer elemento medido numa escala contínua é uma variável aleatória contínua.

Existem duas funções associadas a cada variável contínua X: a **função densidade de probabilidade**, simbolizada por **f(X)**, e a **função cumulativa de probabilidade**, ou **função de distribuição de probabilidade** representada por **F(X)**. A função **f(X)** é aquela cuja integral de X = a até X = b (b ≥ a) dá a probabilidade de que X assuma valores compreendidos no intervalo (a, b), ou seja,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(X)\, dX \qquad (1)$$

A função cumulativa de probabilidade F(b) é tal que:

$$F(b) = \Pr ob(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(X)\, dX \qquad (2)$$

Qualquer função definida no campo real só pode ser considerada como uma função densidade de probabilidade se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$f(X) \ge 0 \qquad (3)$$

para todo X e

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X\, dX = 1 \qquad (4)$$

A probabilidade de que a variável X assuma valores no intervalo (a, b) é dada por:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(X)\, dX = F(b) - F(a) \qquad (5)$$

e a probabilidade de que a variável contínua X assuma um valor em particular, b, por exemplo, é:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(X)\, dX = F(b) - F(b) = 0 \qquad (6)$$