PROBABILIDADE

1. INTRODUÇÃO

Embora o cálculo das probabilidades pertença ao campo da Matemática, sua inclusão aqui se justifica pelo fato da maioria dos fenômenos de que trata a Estatística ser de natureza aleatória ou probabilística. Consequentemente, o conhecimento dos aspectos fundamentais do cálculo de probabilidades é uma necessidade essencial para o estudo da **Estatística Inferencial.**

Procuramos resumir aqui os conhecimentos que julgamos necessários para termos um ponto de apoio em nossos primeiros passos no caminho da Estatística Inferencial. Esses passos serão apresentados no capítulo seguinte, que trata da conceituação de **variável aleatória** e das principais distribuições de probabilidades de **variáveis discretas** e **contínuas.**

2. EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Todo o *processo* de realizar observações e obter dados é denominado **experimento .**

Experimentos Determinísticos:- são aqueles cujos resultados podem ser determinados antes de sua realização. Por exemplo: quanto tempo levará um carro para percorrer um trajeto de 200 km numa velocidade média de 100 km/h? Não é necessário executar o experimento para determinar a resposta: 2 horas.

Experimentos Estocásticos ou Aleatórios[1]:- Em quase todas as observações, em maior ou menor grau, vislumbramos o **acaso.** Assim, da afirmação "é provável que o meu time ganhe a partida de hoje" pode resultar:

a. que, apesar do favoritismo, ele perca;
b. que, como pensamos, ele ganhe;
c. que empate.

Como vimos, o resultado final depende do **acaso.** Fenômenos como esses são chamados **fenômenos aleatórios** e os experimentos associados a eles de **experimentos aleatórios.**

> Experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.

3. ESPAÇO AMOSTRAL

A cada experimento aleatório correspondem, em geral, vários resultados possíveis. Assim, ao lançarmos uma moeda, há dois resultados possíveis: ocorrer **cara** ou ocorrer **coroa.** Já ao lançarmos um dado há seis resultados possíveis: **1, 2, 3, 4, 5, 6.**

> Ao conjunto formado por todos os possíveis e diferentes resultados de um *experimento aleatório* dá-se o nome de **espaço amostral** ou **conjunto universo**, representado[2] por **S.**

Os dois experimentos citados anteriormente têm os seguintes *espaços amostrais*:

- lançamento de uma moeda: S = {Ca, CO};

- lançamento de um dado: S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Outros dois exemplos são:

- dois lançamentos sucessivos de uma moeda: S = {(Ca,Ca), (Ca,Co), (Co,Ca), (Co,Co)}

- lançamento simultâneo de dois dados: S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), ..., (6,6)}

> Cada um dos elementos de **S** que correspondem a um resultado recebe o nome **ponto amostral.** Assim:
>
> $2 \in S \Rightarrow 2$ é um ponto amostral de **S**;
>
> $\{Ca, Co\} \in S \Rightarrow \{Ca, Co\}$ é um ponto amostral de **S.**

---

[1] Do latim *alea* = sorte
[2] Alguns autores usam a letra **Ω**

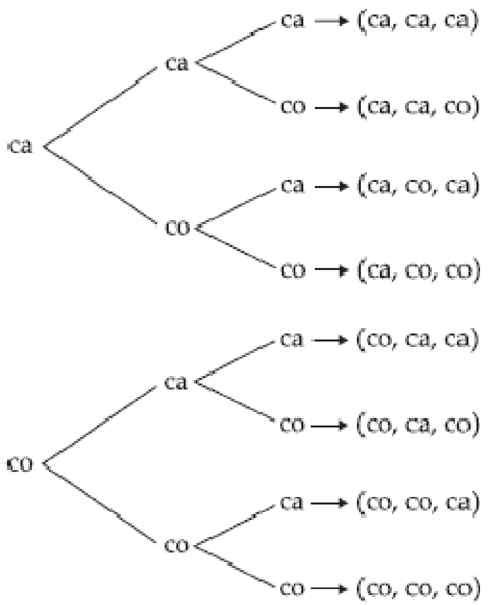
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determinar o espaço amostral relativo aos experimentos abaixo:

a. Três lançamentos consecutivos de uma moeda comum.

Solução

Sendo ca = cara e co = coroa, temos:

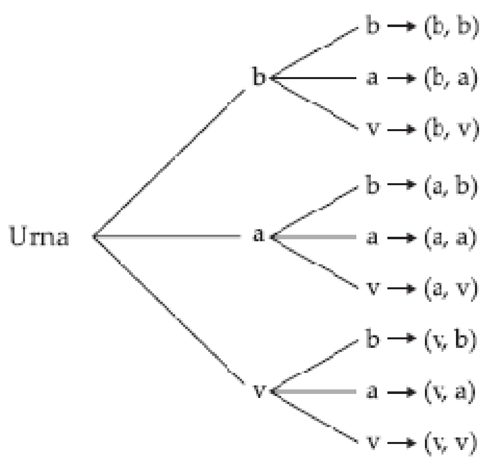


Resposta:

S ou **Ω** = {(ca, ca, ca), (ca, ca, co), (ca, co, ca), (ca, co, co), (co, ca, ca), (co, ca, co), (co, co, ca), (co, co, co)}

b. Duas retiradas consecutivas e sem reposição de bolas de uma urna que contém 3 bolas brancas, 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas.

Solução



Resposta:

Ω = {(b, b), (b, a), (b, v), (a, b), (a, a), (a, v), (v, b), (v, a), (v, v)}

4. EVENTOS

Chamamos de **evento** qualquer subconjunto do espaço amostral **S** de um experimento aleatório.

Assim, qualquer que seja **E**, se **E** $\subset$ **S** (**E** está contido em **S**), então **E** é um evento de **S**.

Se **E** = **S**, **E** é chamado de *evento certo*
Se **E** $\subset$ **S** e **E** é um conjunto unitário, **E** é chamado *evento elementar*.
Se **E** = $\varnothing$, **E** é chamado *evento impossível*.

No lançamento de um dado, onde **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, temos:

A = {2, 4, 6} $\subset$ S; logo, **A** é um evento de **S**

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\subset$ **S**; logo, **B** é um evento certo de **S** (**B** = **S**)

$\mathbf{C} = \{4\} \subset \mathbf{S}$; logo, **C** é um evento elementar[3] de **S**

$\mathbf{D} = \varnothing \subset \mathbf{S}$; logo, **D** é um evento impossível de **S**.

Um evento é sempre definido por uma sentença. Assim, os eventos acima podem ser definidos pelas sentenças:

"Obter um número par na face superior".

"Obter um número menor ou igual a 6 na face superior".

"Obter o número 4 na face superior".

"Obter um número maior que 6 na face superior".

4. 1 – OPERAÇÕES COM EVENTOS

O *complemento* de um evento **A** é o subconjunto $\tilde{\mathbf{A}}$ formado pelos elementos do espaço amostral não incluídos no evento A. Por exemplo, o complemento do evento **A** = {CaCo, CoCa} é o evento $\tilde{\mathbf{A}}$ = {CaCa, CoCo}.

Dois ou mais eventos de um mesmo espaço amostral podem ser agrupados em operações de união e interseção, assim definidas:

- A operação *união* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formado pelos elementos comuns e não comuns dos dois conjuntos, **A** e **B**.
- A operação *interseção* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formados apenas pelos elementos comuns aos dois conjuntos, **A** e **B**.

Vejamos algumas conseqüências das operações com eventos:

- A *união* de um evento **A** e seu complemento $\tilde{\mathbf{A}}$ é o próprio espaço amostral S; isto é, $\mathbf{A} \cup \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}$.
- A *interseção* de um evento A e seu complemento $\tilde{\mathbf{A}}$ é o conjunto vazio, isto é, $\mathbf{A} \cap \tilde{\mathbf{A}} = \varnothing$.

4. 1 –EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES E COLETIVAMENTE EXAUSTIVOS

Os resultados possíveis do lançamento de uma moeda são apenas dois, os eventos elementares Ca e Co. Pela própria característica do experimento, se o resultado de um lançamento for cara este resultado não poderá ser também e ao mesmo tempo coroa, pois são eventos *mutuamente excludentes*. A união de eventos elementares forma o espaço amostral, pois são eventos *coletivamente exaustivos*. Portanto, verifica-se que os eventos **A** e **B** pertencentes ao mesmo espaço amostral S:

- São *mutuamente excludentes* se sua interseção for vazia: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, pois os dois eventos não têm nenhum elemento em comum. Ex: Os eventos Ca e Co resultantes do lançamento de uma moeda.
- São *coletivamente exaustivos* se a união dos eventos formarem o espaço amostral: $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{S}$, onde cada evento pode ter elementos repetidos no outro evento. Ex: O espaço amostral da nota final de Tópicos de Matemática Aplicada está formado por quatro eventos elementares: conceito A, conceito B, conceito C e conceito D. Os quatro conceitos são eventos mutuamente excludentes e juntamente são eventos coletivamente exaustivos, pois quando agrupados formam o espaço amostral de todos os conceitos.

EXERCÍCIOS

1. Considerando o experimento: lançar uma moeda comum e anotar o resultado, lançando em seguida um dado comum e anotando o resultado como um par (moeda, dado), descrever:
   a. o espaço amostral S;
   b. o evento E_1 = sair cara na moeda;
   c. o evento E_2 = sair par no dado;
   d. o evento E_3 = sair cara na moeda e par no dado;
   e. o evento E_4 = sair cara na moeda ou par no dado.
2. Fazendo duas retiradas consecutivas (com reposição) de bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?
3. Retirando, de uma só vez, duas bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?
4. Considerando o experimento: fazer dois lançamentos consecutivos de um dado comum e honesto e anotar a face que ficará voltada para cima em cada lançamento, determinar:

   a. o espaço amostral S;

[3] O evento elementar não pode ser particionado nem dividido.

b. o evento A = a soma dos resultados é 5;
c. o evento B = os resultados são iguais;
d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

5. Considerando o experimento: fazer um lançamento de dois dados comuns, honestos e indistinguíveis e anotar as faces que ficarão voltadas para cima, determinar:

a. o espaço amostral S;
b. o evento A = a soma dos resultados é 5;
c. o evento B = os resultados são iguais;
d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

5. PROBABILIDADE

Dado um *experimento aleatório*, sendo **S** o seu espaço amostral, vamos admitir que todos os elementos de **S** tenham a mesma chance de acontecer, ou seja, que **S** é um **conjunto equiprovável.**

Chamamos de probabilidade de um evento **A** (**A** $\subset$ **S**) o número real P(**A**), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Onde:

n(**A**) é o número de elementos de **A**;

n(B) é o número de elementos de **S.**

EXEMPLOS

a. Considerando o lançamento de uma moeda e o evento A "obter cara", temos:

S = {Ca,Co} $\Rightarrow$ n(S) = 2

A = {Ca} $\Rightarrow$ n(A) = 1

Logo: $P(A) = \frac{1}{2}$

O resultado acima nos permite afirmar que, ao lançarmos uma moeda equilibrada, temos 50% de chance de que apareça **cara** na face superior.

b. Considerando o lançamento de um dado, vamos calcular:

- a probabilidade do evento **A** "obter um número par na face superior".

Temos:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(S) = 6

A = {2, 4, 6}$\Rightarrow$ n(A) = 3 Logo: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- a probabilidade do evento **B** "obter um número menor ou igual a 6 na face superior".

Temos:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(S) = 6

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}$\Rightarrow$ n(B) = 6 Logo: $P(A) = \frac{6}{6} = 1$

- a probabilidade do evento **C** "obter o número 4 na face superior".

Temos:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ n(S) = 6

C = { 4 }$\Rightarrow$ n(C) = 1 Logo: $P(A) = \frac{1}{6}$

- a probabilidade do evento **D** "obter um número maior que 6 na face superior".

Temos:
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

$B = \varnothing \Rightarrow n(D) = 0$ Logo: $P(A) = \frac{0}{6} = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, construímos todos os números que podem ser representados usando dois deles (sem repetir). Escolhendo ao acaso (aleatoriamente) um dos números formados, qual a probabilidade de o número sorteado ser:

a. par

Temos 7 possibilidades de escolha do primeiro algarismo dos números e seis escolhas do segundo algarismo (os números não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 7 . 6 = 42 caso possíveis.

Para o número ser par deverá terminar (unidade) em 2, 4 ou 6. Devemos ter 3 possibilidades (2, 4, 6) associadas a 6 possibilidades (não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 3 . 6 = 18 casos favoráveis. Logo a probabilidade será:

$$P(par) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

b. múltiplo de 5?

Casos possíveis = 42

Casos favoráveis = 1 . 6 = 6

$$P(múltiplo\ de\ 5) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Pelos exemplos que acabamos de ver, podemos concluir que, sendo $n(S) = n$:

a. a probabilidade do **evento certo** é igual a 1:

$P(S) = 1$

b. a probabilidade do **evento impossível** é igual a zero:

$P(\varnothing) = 0$

c. a probabilidade de um **evento E qualquer** $(E \subset S)$ é um número real P(E), tal que:

$0 \leq P(E) \leq 1$

d. a probabilidade de um **evento elementar E qualquer** é, lembrando que $n(E) = 1$:

$P(E) = \frac{1}{n}$

6. EVENTOS COMPLEMENTARES

Sabemos que um evento pode ocorrer ou não. Sendo p a probabilidade de que ele ocorra (sucesso) e q a probabilidade de que ele não ocorra (insucesso), para um mesmo evento existe sempre a relação:

$$\boxed{p + q = 1 \Rightarrow q = 1 - p}$$

Assim, se a probabilidade de se realizar um evento é $p = \frac{1}{5}$, a probabilidade de que ele não ocorra é:

$$q = 1 - p \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Sabemos que a probabilidade de tirar o 4 no lançamento de um dado é $p = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de não tirar o 4 no lançamento de um dado é:

$$q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Um baralho tem 12 cartas, das quais 4 são ases. Retiram-se 3 cartas ao acaso. Qual a probabilidade de haver pelo menos um ás entre as cartas retiradas?

Solução

12 cartas, das quais 4 são ases.

Espaço amostral = U

n(U) = 12 . 11 . 10 = 1.320

Num baralho padrão temos 52 cartas, como mostrado:

♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Evento A = sair pelo menos um ás   Evento A_{com} = não sair ás.

$n(A_{com}) = \underset{\text{não Ás}}{8} \,.\, \underset{\text{não Ás}}{7} \,.\, \underset{\text{não Ás}}{6} = 336 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{336}{1.320} = \frac{14}{55} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$

7. EVENTOS INDEPENDENTES

Dizemos que **dois eventos** são **independentes** quando a realização ou a não-realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa.

Por exemplo, quando lançamos dois dados, o resultado obtido em um deles independe do resultado obtido no outro.

Se dois eventos são independentes, a probabilidade de que eles se realizem **simultaneamente** é igual ao produto das probabilidades de realização dos dois eventos.

Assim, sendo $\mathbf{p_1}$ a probabilidade de realização do primeiro evento e $\mathbf{p_2}$ a probabilidade de realização do segundo evento, a probabilidade de que tais eventos se realizem simultaneamente é dada por:

$$p = p_1 \times p_2$$

EXEMPLO

Lançando dois dados honestos simultaneamente, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado e 5 no segundo dado?

Solução

Lançamos dois dados. A probabilidade de obtermos **1** no primeiro dado é: $p_1 = \frac{1}{6}$.
A probabilidade de obtermos **5** no segundo dado é: $p_2 = \frac{1}{6}$. Logo, a probabilidade de obtermos, simultaneamente, 1 no primeiro e 5 no segundo é:

$p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação $x^2 + bx + 1 = 0$.

Determine:
a. a probabilidade de essa equação ter raízes reais;
b. a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

Solução

a. Para que esta equação $x^2 + bx + 1$, com $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tenha raízes reais, o discriminante (Δ) dessa equação deve ser não-negativo.
Como $\Delta = b^2 - 4$, então os valores possíveis de b são 2, 3, 4, 5 e 6, ou seja, existem 5 possibilidades para b.
Portanto, a probabilidade de essa equação ter raízes reais é **5/6**.
b. Sabendo que ocorreu um número ímpar (ou seja, 1, 3 ou 5), temos do item (a) que a probabilidade pedida é **2/3**.

2. Considere o experimento que consiste no lançamento de um dado perfeito (todas as seis faces têm probabilidades iguais). Com relação a esse experimento, considere os seguintes eventos:
   a) I e II são eventos independentes?
   b) II e III são eventos independentes?

c) Considerando o item a, calcule a probabilidade de um resultado par e maior do que 4.
d) Considerando o item b, calcule a probabilidade de um resultado maior do que 4 e múltiplo de 3.

Solução

Ω = espaço amostral $\Rightarrow$ Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
I = {2, 4, 6} II = {5, 6} III = {3, 6}
I ∩ II = {6} II ∩ III = {6}
Temos as probabilidades: $P(I) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $P(II) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(III) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(I \cap II) = \frac{1}{6}$ $P(II \cap III) = \frac{1}{6}$
a. Como P(I∩II) = P(I). P(II), os eventos I e II são independentes entre si.
b. Como P(II∩III) ≠ P(II) . P(III), os eventos II e III não são independentes entre si.
c. P(I∩II) = P(I). P(II) = $\frac{1}{2} x \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
d. P(II∩III) = P(II). P(III/II) = $\frac{1}{3} x \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

3. Um juiz de futebol possui três cartões no bolso. Um é todo amarelo, outro é todo vermelho e o terceiro é vermelho de um lado e amarelo do outro. Num determinado lance, o juiz retira, ao acaso, um cartão do bolso e mostra a um jogador. A probabilidade de a face que o juiz vê ser vermelha e de a outra face, mostrada ao jogador, ser amarela é:
a. 1/2 b. 2/5 c. 1/5 d. 2/3 e. 1/6

Solução

Sejam: A = evento cartão com as duas cores e
B = evento face vermelha para o juiz, tendo ocorrido o cartão de 2 cores.

P(A∩B) = P(A). P(B/A)
$P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B/A) = \frac{1}{2}$ (Probabilidade condicional – ocorre B, se ocorrer A)
P(A∩B) = $\frac{1}{3} x \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ **Alternativa E**

8. EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS

Dizemos que **dois** ou **mais eventos** são **mutuamente exclusivos** quando a realização de um exclui a realização do(s) outro(s).

Assim, no lançamento de uma moeda, o evento "tirar cara" e o evento "tirar coroa" são mutuamente exclusivos, já que, ao se realizar um deles, o outro não se realiza.

Se dois eventos são mutuamente exclusivos, a probabilidade de que um ou outro se realize é igual à soma das probabilidades de que cada um deles se realize:

$$p = p_1 + p_2$$

EXEMPLO

Lançamos um dado. Qual a probabilidade de se tirar o 3 **ou** o 5?

Solução

Como os dois eventos são mutuamente exclusivos, temos:

p = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1 a 100. A probabilidade de o bilhete sorteado ser maior que 40 **ou** número par é:

a. 60% b. 70% c. 80% d. 90% e. 50%

Solução

n(U) = 100
A = maior que 40 $\Rightarrow$ n(A) = 60 e B = ser par $\Rightarrow$ n(B) = 50
$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ e $P(A) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

n(A ∩B) = 30 ...... existem 60 números maiores que 40 e a metade deles, 30, são pares $\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = 80\%$ Resp: **Alternativa C**

2. Num único lance de um par de dados honestos, a probabilidade de saírem as somas “múltiplo de 4” ou “primo” é:

a. 1/3 b. ¼ c. 1/5 d. 2/3 e. 2/5

Solução

A = soma ser múltiplo de 4 B = soma ser primo

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(A) = \frac{9}{36}$ e $P(B) = \frac{15}{36}$ $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{36} + \frac{15}{36} = \frac{2}{3}$

ALTERNATIVA D

3. Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado.
Qual a freqüência da face 1?

Solução

$P(1) = x$ $P(6) = 2x$ $P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = \frac{1}{6}$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 2x = 1$

$3x = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ $\therefore$ $P(1) = \frac{1}{9}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS (REVISÃO)

1. Qual a probabilidade de sair o *ás de ouros* quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

Solução:

Num baralho comum há 52 cartas, sendo 13 de cada naipe.

As cartas são: A (ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama) e K(rei).

Os naipes são:
Os naipes são:
13 copas: ♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 ouros: ♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 naipe de paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Como só há um ás de ouros, o número de elementos do evento é 1; logo: $P = \frac{1}{52}$

2. Qual a probabilidade de sair um *rei* quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

Solução:

Como há 4 reis, o número de elementos do evento é 4; logo:

$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

3. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosos. Sendo retirada uma peça, calcule:

a. a probabilidade dessa peça ser defeituosa
b. a probabilidade dessa peça não ser defeituosa

Solução:

a.Temos: $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b. Sendo este evento e o anterior complementares, temos: $P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

4. No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de se obter soma igual a 5

Solução:

O evento é formado pelos elementos (1, 4), (2, 3), (3, 2) e (4, 1). Como o número de elementos de S é 36, temos: $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

5. De dois baralhos de 52 cartas retiram-se, simultaneamente, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual a probabilidade da carta do primeiro baralho ser um *rei* e a do segundo ser o *5 de paus*?

Solução:

a. Temos: $P_1 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ e $P_2 = \frac{1}{52}$

Como esses dois acontecimentos são independentes e simultâneos, vem: $P = \frac{1}{13} \times \frac{1}{52} = \frac{1}{676}$

6. Uma urna **A** contém: 3 bolas brancas, 4 bolas pretas, 2 verdes; uma urna B contém: 5 bolas brancas, 2 pretas, 1 verde; uma urna C contém: 2 bolas brancas, 3 pretas, 4 verdes. Uma bola é retirada de cada urna. Qual é a probabilidade das três bolas retiradas da primeira, segunda e terceira urnas serem, respectivamente, branca, preta e verde?

Solução:

Temos: $P_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P_3 = \frac{4}{9}$

Como os três eventos são independentes e simultâneos, vem:

$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{27}$

7. De um baralho de 52 cartas retiram-se, ao acaso, duas cartas sem reposição. Qual a probabilidade da carta da primeira carta ser o *ás de paus* e a segunda ser o *rei de paus*?

Solução:

A probabilidade de sair o ás de paus na primeira carta é: $P_1 = \frac{1}{52}$

Após a retirada da primeira carta, restam 51 cartas no baralho, já que a carta retirada não foi reposta. Assim, a probabilidade da segunda ser o rei de paus é:

$P_2 = \frac{1}{51}$

Como esses dois acontecimentos são independentes, temos: $P = \frac{1}{52} \times \frac{1}{51} = \frac{1}{2.652}$

8. Qual a probabilidade de sair uma figura quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

Solução:

Temos: $P_r = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P_d = \frac{1}{13}$, $P_v = \frac{1}{13}$

Como os eventos são mutuamente exclusivos, vem: $P = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{3}{13}$

NOTA: Este problema pode ser resolvido, ainda, com o seguinte raciocínio: Como em um baralho temos 12 figuras (4 damas, 4 valetes, 4 reis), vem: $P = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

9. Qual a probabilidade de sair uma carta de copas ou de ouros quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

Solução:

Temos: $P_c = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P_o = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Como os eventos são mutuamente exclusivos, vem: $P = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

10. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número não-inferior a 5?

Solução:

A probabilidade de se ter um número não inferior a 5 é a probabilidade de se obter 5 ou 6. Assim: $P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

11. São dados dois baralhos de 52 cartas. Tiramos, ao mesmo tempo, uma carta do primeiro baralho e uma carta do segundo. Qual é a probabilidade de tirarmos uma dama e um rei, não necessariamente nessa ordem?

Solução:

A probabilidade de tirarmos uma dama do primeiro baralho (4/52) e um rei do segundo (4/52) é, de acordo com o problema 7: $P_1 = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

A probabilidade de tirarmos um rei do primeiro baralho e uma dama do segundo é:

$$P_2 = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

Como esses dois eventos são mutuamente exclusivos, temos: $P = \frac{1}{169} + \frac{1}{169} = \frac{2}{169}$

12. Dois dados são lançados conjuntamente. Determine a probabilidade da soma ser 10 ou maior que 10.

Solução:

A soma deverá ser, então, 10, 11 ou 12.

Para que a soma seja 10, a probabilidade é:

$$\left.\begin{matrix}(4,\ 6)\\(5,\ 5)\\(6,\ 4)\end{matrix}\right\} \Rightarrow n(10) = 3 \Rightarrow p_{10} = \frac{3}{36}$$

Para que a soma seja 11, a probabilidade é:

$$\left.\begin{matrix}(5,\ 6)\\(6,\ 5)\end{matrix}\right\} \Rightarrow n(11) = 2 \Rightarrow p_{11} = \frac{2}{36}$$

Para que a soma seja 12, a probabilidade é: (6, 6) $\Rightarrow n(12) = 1 \Rightarrow p_{12} = \frac{1}{36}$

Com esses três eventos são mutuamente exclusivos, temos: $P = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

13. Numa pequena cidade, realizou-se uma pesquisa com certo número de indivíduos do sexo masculino, na qual procurou-se obter uma correlação entre a estatura de pais e filhos. Classificaram-se as estaturas em 3 grupos: alta (A), média (M) e baixa (B). Os dados obtidos na pesquisa foram sintetizados, em termos de probabilidades, na matriz:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{matrix}\ A\ & \ M\ & \ B\ \end{matrix}}^{\text{Filho}} \\ \text{Pai}\begin{cases}A\\M\\B\end{cases} & \begin{bmatrix}5/8 & 1/4 & 1/8\\3/8 & 3/8 & 1/4\\1/8 & 3/8 & 1/2\end{bmatrix}\end{array}$$

O elemento da primeira linha e segunda coluna da matriz, que é 1/4, significa que a probabilidade de um filho de pai alto ter estatura média é 1/4. Os demais elementos interpretam-se similarmente. Admitindo-se que essas probabilidades continuem válidas por algumas gerações, a probabilidade de um neto de um homem com estatura média ter estatura alta é:

a. 13/32 b. 9/94 c. 3/4 d. 25/64 e. 13/16

Solução:

Pai	Filho	Neto	
M	B	A	$\Rightarrow \frac{1}{4}x\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$
M	M	A	$\Rightarrow \frac{3}{8}x\frac{3}{8} = \frac{9}{64}$
M	A	A	$\Rightarrow \frac{3}{8}x\frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{32} + \frac{9}{64} + \frac{15}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}$ **Alternativa A**

EXERCÍCIOS

1. Determine a probabilidade de cada evento:

a. Um número par aparece no lançamento de um dado.
b. Uma figura aparece ao se extrair uma carta de um baralho de 52 cartas.
c. Uma carta de ouros aparece ao se extrair uma carta de um baralho de 52 cartas.
d. Uma só coroa aparece no lançamento de três moedas.

2. Um número inteiro é escolhido aleatoriamente dentre os números 1, 2, 3, ..., 49, 50. Determine a probabilidade de:

a. o número ser divisível por 5.
b. o número terminar em 3;
c. o número ser divisível por 6 ou por 8;
d. o número ser divisível por 4 e por 6.

3. Dois dados são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de:

a. a soma ser menor que 4;
b. a soma ser 9;
c. o primeiro resultado ser maior que o segundo;
d. a soma ser menor ou igual a 5.

4. Uma moeda é lançada duas vezes. Calcule a probabilidade de:

a. não ocorrer cara nenhuma vez;
b. obter-se cara na primeira ou na segunda jogada.

5. Um inteiro entre 3 e 11 será escolhido ao acaso.

a. qual a probabilidade de que esse número seja ímpar?
b. qual a probabilidade de este número seja ímpar e divisível por 3?

6. Uma carta é retirada ao acaso de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de que a carta retirada seja uma dama ou uma carta de copas?

7. No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de se obter um par de pontos iguais?

8. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Sendo retiradas aleatoriamente 2 peças, calcule:

a. a probabilidade de ambas serem defeituosas;
b. a probabilidade de ambas não serem defeituosas;
c. a probabilidade de ao menos uma ser defeituosa.

9. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair o número 6 ou um número ímpar?

10. Duas cartas são retiradas ao acaso de um baralho de 52 cartas. Calcule a probabilidade de se obterem:

a. dois valetes;
b. um valete e uma dama.

11. Um casal planeja ter três filhos. Determine a probabilidade de nascerem:

a. três homens;
b. dois homens e uma mulher.

12. Uma moeda é lançada três vezes. Calcule a probabilidade de obtermos:

a. três caras;
b. duas caras e uma coroa;
c. uma cara somente;
d. nenhuma cara;
e. pelo menos uma cara;
f. no máximo uma cara.

13. Um dado é lançado duas vezes. Calcule a probabilidade de:

a. sair um 6 no primeiro lançamento;
b. sair um 6 no segundo lançamento;
c. não sair 6 em nenhum lançamento;
d. sair um 6 pelo menos.

14. Uma urna contém 50 bolas idênticas. Sendo as bolas numeradas de 1 a 50, determine a probabilidade de, em uma extração ao acaso:

a. obtermos a bola de número 27;
b. obtermos uma bola de número par;
c. obtermos uma bola de número maior que 20;
d. obtermos uma bola de número menor ou igual a 20.

15. Uma loja dispõe de 12 geladeiras do mesmo tipo, das quais 4 apresentam defeitos.

a. Se um freguês vai comprar uma geladeira, qual a probabilidade de levar uma defeituosa?
b. Se um freguês vai comprar duas geladeiras, qual a probabilidade de levar duas defeituosas?
c. Se um freguês vai comprar duas geladeiras, qual a probabilidade de levar pelo menos uma defeituosa?

16. Um par de dados é atirado. Encontre a probabilidade de que a soma seja 10 ou maior que 10 se:

a. um 5 aparece no primeiro dado;
b. um 5 aparece pelo menos em um dos dados

17. Lança-se um par de dados. Aparecendo dois números diferentes, encontre a probabilidade de que:

a. a soma seja 6;
b. o 1 apareça;
c. a soma seja 4 ou menor que 4.

18. Um lote é formado por 10 peças boas, 4 com defeitos e 2 com defeitos graves. Uma peça é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de que:

a. ela não tenha defeitos graves;
b. ela não tenha defeitos;
c. ela seja boa ou tenha defeitos graves.

19. Considere o mesmo lote do problema anterior. Retiram-se 2 peças ao acaso. Calcule a probabilidade de que:

a. ambas sejam perfeitas;
b. pelo menos uma seja perfeita;
c. nenhuma tenha defeitos graves;
d. nenhuma seja perfeita.

RESPOSTAS:

1. a. 1/2	b. 3/13	c. 1/4	d. 3/8		
2. a. 1/5	b.1/10	c. 1/25	d. 2/25		
3. a. 1/12	b. 1/9	c.5/12	d.5/18		
4. a. 1/4	b. ½	5. a. 3/7	b. 1/7		
6. 4/13		7. 1/6			
8. a. 1/11	b. 14/33	c.19/33	9. 2/3		
10. a. 1/221	b. 4/663				
11. a. 1/8	b. 3/8				
12. a. 1/8	b. 3/8	c. 3/8	d. 1/8	e. 7/8	f. 1/2
13. a. 1/6	b. 1/6	c. 25/36	d. 11/36		
14. a. 1/50	b. 1/2	c. 3/5	d. 2/5		
15. a. 1/3	b. 1/11	c. 19/33			
16. a. 1/18	b. 1/12				
17. a. 1/9	b. 5/18	c. 1/9			
18. a. 7/8	b. 5/8	c. ¾			
19. a. 3/8	b. 7/8	c. 91/120	d. 1/8		

9. PROBABILIDADE NO EXCEL

A probabilidade P(A) do evento A de um experimento aleatório pode ser obtida como a porcentagem de ocorrência do evento A depois de repetir o experimento um número muito grande de vezes. Por exemplo, repetindo um número muito grande de vezes o lançamento de uma moeda, a *freqüência relativa* do evento cara poderá ser obtida do resultado de dividir o número de caras observadas pelo número de repetições do experimento. Neste caso, a *freqüência relativa* do evento cara é a probabilidade do evento cara. A simulação do lançamento de uma moeda foi realizada na planilha **Simulação** incluída na pasta **Probabilidade01.xlsm**. A planilha **Simulação** realiza 1.500 lançamentos de uma moeda,

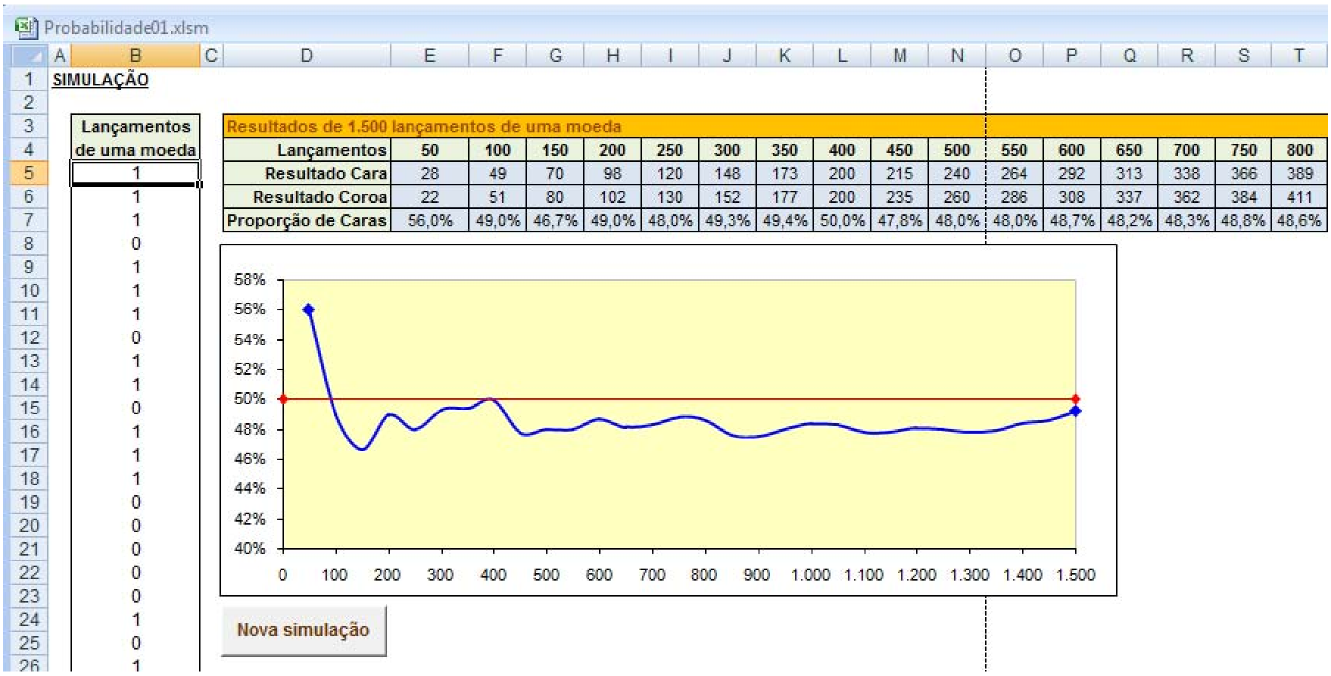


FIGURA 01

Na simulação do lançamento da moeda utilizamos a ferramenta de *Geração de número aleatório* para gerar os dígitos aleatórios 0 e 1 que representam, respectivamente, os eventos *coroa* e *cara*. Para facilitar a obtenção das simulações, o procedimento de amostragem foi mecanizado com a construção da macro Simulação no ambiente VBA do Excel 2007[4]. A planilha **Simulação** foi construída orientada para calcular a *freqüência relativa* do evento cara do lançamento de uma moeda.

```
Sub Simulação()
    Application.Run "ATPVBAEN.XLAM!Random", ActiveSheet.Range("$C$5"), 1, 1500 _
    , 7, , ActiveSheet.Range("$E$10:$F$11")
    Application.ScreenUpdating = False
    Range("C5:C1504").Select
    Selection.Copy
    Range("B5").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks:= _
        False, Transpose:=False
    Calculate
    Range("C5:C1504").Select
    Selection.ClearContents
    Range("B5").Select
    Application.ScreenUpdating = True
```

[4] Cuidado no Excel 2003 e anteriores, use "ATPVBAEN.XLA!Random"

```
End Sub
```

- No intervalo B5:B1504 são registrados os resultados de 1.500 lançamentos de uma moeda. Esse intervalo é preenchido de uma vez pela ferramenta de análise *Geração de números aleatórios*.
- A quantidade de caras dos primeiros cinqüenta lançamentos é registrada na célula E5 (através da função =SOMA($B$5:B54) definida nesta célula E5). Da mesma forma, a quantidade de caras dos primeiros cem lançamentos é registrada na célula F5 (alterando o intervalo da função SOMA pra $B$5:B104).; neste resultado estão incluídos os resultados dos primeiros cinqüenta lançamentos. Procedemos da mesma forma até completar a quantidade de caras de 1.500 lançamentos na célula AH5.
- No intervalo E6:AH6 são calculadas as quantidades de coroas pela fórmula =E4-E5.
- No intervalo E7:AH7 são calculadas as *proporções de caras* ou *freqüências relativas de caras* utilizando a fórmula =E5/E4.
- Com as *freqüências relativas* construímos o gráfico da *freqüência relativa* do evento *cara* em função do número de lançamentos. Definimos duas séries de dados: **Série1** – com os valores de X dados por: ='Simulação'!$E$4:$AH$4 e os valores de Y dados por: ='Simulação '!$E$7:$AH$7 e **Série2** – com valores de X dados por: ='Simulação '!$G$10:$G$11 e os valores de Y dados por: ='Simulação '!$H$10:$H$11.
- Pressionando o botão Nova Simulação o modelo realiza um novo grupo de 1.500 lançamentos e constrói o gráfico, como mostrado na Figura.

A *probabilidade* de obter *cara* no lançamento de uma moeda é 0,50. Entretanto, esse resultado não significa que depois de lançar uma moeda cinqüenta vezes seguidas sempre ocorrerão vinte e cinco caras e vinte e cinco coroas. Os gráficos abaixo mostram que a *freqüência relativa* do evento *cara* é variável.

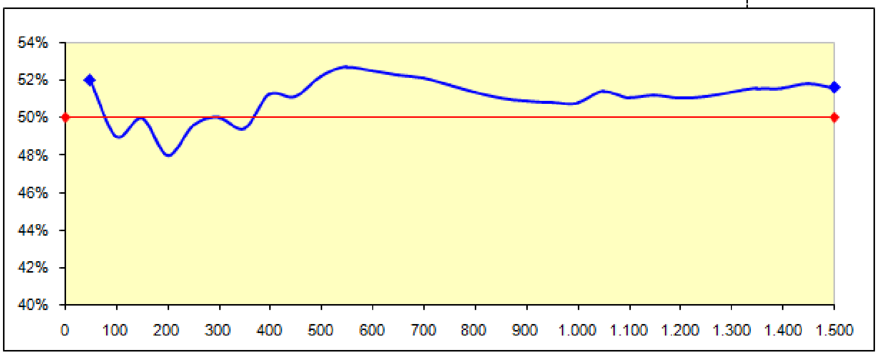


FIGURA 02

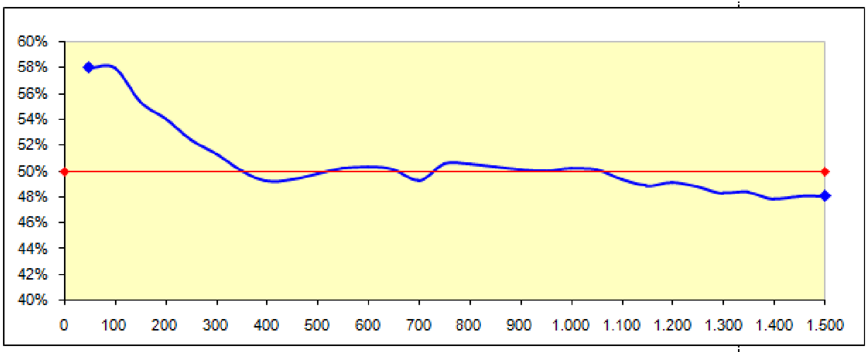


FIGURA 03

- O gráfico das *freqüências relativas de caras* da Figura 01 começa com 56%, oscila um pouco abaixo de 50% e termina perto de 50%.
- O gráfico das *freqüências relativas de caras* da Figura 02 começa com 52%, oscila abaixo e acima de 50% e termina perto de 52%.
- O gráfico das *freqüências relativas de caras* da Figura 03 começa com 58%, oscila ligeiramente em torno de 50% e termina perto de 48%.

Se o experimento for repetido um número muito grande de vezes, bem maior que 1.500, a diferença entre a freqüência relativa do evento cara e a probabilidade teórica 50% será cada vez menor. Qual o significado de um número muito grande de vezes? Quanto maior o número n de lançamentos, mais próximo o resultado estará de 50%. Em termos matemáticos n tende a infinito, lei dos grandes números, e a probabilidade do evento cara é obtida com a fórmula:

$$P(cara) = \frac{Quantidade\ de\ caras}{Número\ de\ lançamentos}$$

9. TÉCNICAS DE CONTAGEM

Listar e *contar* os eventos elementares do experimento aleatório lançamento de uma moeda três vezes seguidas é um procedimento simples, pois o espaço amostral do experimento é pequeno. Entretanto, se o experimento fosse o lançamento de um dado três vezes seguidas ou lançamento de uma moeda oito vezes seguida, o procedimento listar e contar os possíveis resultados seria trabalhoso. As *técnicas de contagem*[5] determinam, sem enumeração direta, o número de resultados possíveis de um espaço amostral. Para facilitar o procedimento de cálculo mostraremos as técnicas de contagem combinadas com funções matemáticas e estatísticas do Excel incluídas na planilha **Funções para Contagem** incluída na pasta **Probabilidade01.xlsm.**

EXEMPLO 1

Determinar o número de resultados possíveis do lançamento de um dado três vezes seguidas.

Solução

Para contar os resultados possíveis procedemos como segue:

- Cada lançamento de um dado tem 6 resultados possíveis.
- Cada resultado dos 6 resultados do segundo lançamento poderá ser combinado com os 6 resultados do primeiro lançamento totalizando 36 resultados possíveis
- Cada resultado dos 6 resultados do terceiro lançamento poderá ser combinado com os 36 possíveis resultados do segundo lançamento totalizando 216 resultados

O exemplo 1 mostra o procedimento de contagem denominado *fórmula da multiplicação*: se de uma ocorrência há m resultados e, em sequência, de outra ocorrência há n resultados, então há m x n resultados associados. Utilizando os dados do Exemplo 1, verificamos que os resultados possíveis do lançamento de um dado três vezes seguidas são 216:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$$

EXEMPLO 2

A placa de carro está formada, primeiro, por três letras e, em sequência, três dígitos de zero a nove. Determinar o número de placas possíveis considerando que podem ser usadas vinte e duas letras em cada posição e o primeiro dígito não pode ser zero.

Solução

O número de placas possíveis é:

$22 \times 22 \times 22 \times 9 \times 10 \times 10 = 22^3 \times 9 \times 10^2 = 9.583.200$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 6, 9, quantos números com 5 algarismos podem ser formados?

Solução

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6.480 \neq 0$
Podem ser formados 6.480 números com 5 algarismos.

2. Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 6, 9, quantos números com 5 algarismos podem ser formados?

Solução

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600 \neq 0$
Podem ser formados 600 números com 5 algarismos.

3. Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 6, 9, quantos números ímpares de 5 algarismos distintos podem ser formados?

Solução

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 288$
Podem ser formados 288 números ímpares com 5 algarismos distintos.

[5] Conhecidas também como *Análise Combinatória*.

4. Utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 6, 9, quantos números pares de 5 algarismos distintos podem ser formados?

Solução

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{1}_{0} = 120 \qquad \underbrace{4}_{\neq 0} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underbrace{2}_{4,6} = 192$$

Podem ser formados 312 números pares com 5 algarismos distintos.
Outra solução:

x = total – ímpares ⇒ x = 600 – 288 = 312

5. Quantos números de 4 algarismos apresentam pelo menos 2 algarismos iguais?

Solução

Total = 9 · 10 · 10 · 10 = 9.000
4 distintos = 9 · 9 · 8 · 7 = 4.536
x = 9.000 – 4.536
x = 4.464

6. Sete pessoas, entre elas Bento e Paulo, estão reunidas para escolher, entre si, a diretoria de um clube formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Determine o número de maneiras de compor a diretoria, onde Paulo é vice-presidente e Bento não é presidente nem tesoureiro.

Solução

U = {Bento, Paulo, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5}

5	. 1	. 4	. 4 =80
Presidente Exceto Paulo e Bento	v. presidente Paulo	secretário Resto	tesoureiro Exceto Paulo, Bento e o escolhido p/presidente

10. ARRANJOS

Os resultados dos Exemplos 9.1 e 9.2 mostram que a *fórmula da multiplicação* dá o número de resultados associados de dois ou mais grupos. A *fórmula do arranjo* dá o número de arranjos de um mesmo grupo.

EXEMPLO 10.1

Qual o número de arranjos de 5 objetos identificados pelas letras *a*, *b*, *c*, *d* e *e*, tomados três a três?

Solução

Para contar o número de permutações procedemos como segue:

- O primeiro objeto pode ser qualquer um dos cinco objetos *a*, *b*, *c*, *d* e *e*.
- O segundo objeto será um dos quatro objetos restantes.
- O terceiro objeto poderá ser um dos três objetos restantes.
- Pela fórmula da multiplicação há 5 x 4 x 3 = 60 palavras de três letras distintas.

O resultado do Exemplo 10.1 é o número de permutações de cinco objetos tomados 3 a 3. De forma geral, o número A(n,r) de permutações de n objetos associados em grupos de r é calculado com a fórmula:

$$A(n,r) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$$

Utilizando a notação fatorial: n! = n x (n – 1) x (n – 2) x . . . x 3 x 2 x 1, com 0! =1:

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Aplicando esta última fórmula para calcular o resultado do Exemplo 10.1:

$$A(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

O Excel dispõe das funções estatísticas FATORIAL e PERMUT cujas sintaxes são as seguintes:

FATORIAL(n)

A função FATORIAL dá o fatorial do número n sendo n um número não-negativo[6]. Por exemplo, o fatorial de n = 3 é:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

EXEMPLO 1

1. Um casal e seus quatros filhos, ao posarem para uma fotografia, ficaram em pé, um ao lado do outro. O número de modos que eles poderão se dispor, se os pais deverão ficar juntos é:

a) 60 d) 720
b) 36 e) 120
c) 240.

Solução

$\boxed{P\ M}\ F_1\ F_2\ F_3\ F_4 = 5!\ 2! = 240$ . . . Alternativa C

PERMUT(n;r)

A função PERMUT dá o número de arranjos de n elementos tomados em grupos de r. Por exemplo, o número de permutações de cinco objetos tomados 3 a 3 do Exemplo 10.1 é obtido como =PERMUT(5;3) $\rightarrow$ 60.

Vejamos um caso especial da permutação. Se x = r o número de permutações será igual a: $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ que é a própria expressão do fatorial de n, que representa o número de permutações de n objetos tomados todos ao mesmo tempo. Por exemplo, se os cinco objetos a, b, c, d e e do Exemplo 10.1 forem tomados ao mesmo tempo, o número de permutações seria igual a 120, resultado obtido com a fórmula da multiplicação ou utilizando a função do Excel: =PERMUT(5;5) $\rightarrow$ 120.

EXEMPLO 2

As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é:

a) PROVA d) ROVAP
b) VAPOR e) RAOPV
c) RAPOV.

Solução

```
Começados por A: 1   4   3   2   1  =   24 anagramas
                 A
Começados por O: 1   4   3   2   1  =   24 anagramas
                 O
Começados por P: 1   4    3   2   1 =    24 anagramas
                 P
                                       ______
                                         72 anagramas
O próximo é o primeiro começando com R.
R A O P V ⇒ Este é o de número 73.
```

EXEMPLO 3

Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas, serão necessárias aproximadamente:

a. 100 dias b. 10 anos c. 1 século. d. 10 séculos. e. 100 séculos.

Solução

Permutação das 10 músicas = 10!

Considerando, aproximadamente, 1 ano por 360 dias, temos:

$\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{360} = 10.080 \cong 10.000\ anos$ 100 séculos **Alternativa E**

11. COMBINAÇÕES

O resultado b, c, d como os resultados c, b, d e d, c, b fazem parte dos sessenta resultados da permutação de cinco objetos identificados pelas letras a, b, c, d e e tomados três a três. Como estes três resultados têm os mesmos objetos b, c

[6] Se n não for inteiro será truncado antes de realizar o cálculo. O Excel dispõe também das funções FACTDOUBLE e MULTINOMIAL.

e *d* deduzimos que na contagem dos arranjos *a ordem dos objetos é importante*. Quando a ordem dos objetos não é importante estamos na contagem denominada combinação, por exemplo, o número de permutações de cinco objetos identificados pelas letras a, b, c, d e e, tomados três a três sem considerar a ordem dos objetos é igual a 10, resultado obtido com a fórmula:

$$\frac{A(5,3)}{3!} = 10$$

De forma geral, o número C(n,r) de combinações de n objetos associados em grupos de r é calculado com a fórmula:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Comparando as fórmulas de A(n,r) e C(n,r) obtemos a seguinte igualdade:

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!}$$

O Excel dispõe da função estatística COMBIN com a sintaxe:

COMBIN(n;x)

A função COMBIN dá o número de combinações de n objetos tomados x a x, considerando que a ordem dos objetos não interessa. Por exemplo, o número de combinações de cinco objetos tomados três a três é 10, valor obtido com a fórmula =COMBIN(5;3). Os valores de n e x são números inteiros positivos; entretanto, a função COMBIN aceita números fracionários que são truncados antes de calcular os fatoriais.

Pode-se ver que, as funções COMBIN, PERMUT e FATORIAL se relacionam da seguinte forma:

$$COMBIN(n;x) = \frac{A(n;x)}{FACT(x)}$$

EXEMPLO 1

1. Em relação a um grupo de 7 pessoas, de quantos modos eu posso convidar:

a) 2 pessoas? c) 5 pessoas?
b) 3 pessoas? d) 7 pessoas?

Solução

$\frac{7.6}{2!}$ = 21 possibilidades (desprezando a ordem das 2 pessoas) ou $\frac{7!}{2!5!} = \frac{7.6.5!}{2!5!} = \frac{7.6}{2!} = 21\ possibilidades$

$\frac{7.6.5}{3!}$ = 35 possibilidades (desprezando a ordem das 3 pessoas) ou $\frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5.4!}{3!4!} = \frac{210}{6} = 35\ possibilidades$

$\frac{7.6.5.4.3}{5!}$ = 21 possibilidades (desprezando a ordem das 5 pessoas) ou $\frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6.5!}{5!2!} = \frac{42}{2} = 21\ possibilidades$

$\frac{7.6.5.4.3.2.1}{7!}$ = 1 possibilidade (desprezando a ordem das 7 pessoas) ou $\frac{7!}{7!0!} = 1\ possibilidade$

EXEMPLO 2

1. Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores.

De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

a) 64 c) 252 e) 1.260
b) 126 d) 640

Solução

$\frac{10.9.8.7.6}{4!} = 1.260\ possibilidades$ (desprezo da ordem dos 4 membros do conselho) ou 10 . C(9,4) = $10 . \frac{9!}{4!5!} = 10.\frac{9.8.7.6.5!}{4!5!} =$ $10.\frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 10.3.2.7.3 = 1.260\ possibilidades =$

EXERCÍCIOS

1. Suponha que depois de lançar uma moeda dez vezes seguida a freqüência relativa do evento cara seja 70%. É razoável aceitar esse resultado?

2.Suponha que depois de lançar uma moeda trinta mil vezes seguidas a freqüência relativa do evento cara seja igual a 0,70. É razoável aceitar esse resultado?

3. Jogue um dado e observe o resultado. Se o experimento for repetido um número muito grande de vezes, que proporção do total de lançamentos terá o resultado observado no primeiro lançamento do dado?

4. Se depois de lançar um dado 12 vezes seguidas a freqüência relativa do resultado 5 for 75% é razoável aceitar esse resultado?

5. Continuando com o lançamento de uma moeda 3 vezes seguidas, qual a probabilidade de obter pelo menos 2 coroas?

6. Continuando com o lançamento de uma moeda 3 vezes seguidas, qual a probabilidade de obter as 3 moedas com a mesma face?

7. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de obter: a) um número menor que cinco e b) um número par.

8. Uma moeda é lançada duas vezes seguidas. Sabendo que o resultado de uma das moedas foi cara, qual a probabilidade que a outra moeda seja também cara?

9. Um homem tinha dois gatos, um preto e um branco. O branco era macho. Qual é a probabilidade de que o outro fosse macho?

10. Um homem tinha dois gatos. Um deles, pelo menos, era macho. Qual a probabilidade de que os dois fossem machos?

11. Semanalmente são sorteados seis números de um grupo de 60 números. Quantos são os resultados possíveis de um sorteio semanal?

12. Continuando com o problema 11. Se você concorrer nesse sorteio, qual a probabilidade de acertar o prêmio?

13. Semanalmente são sorteados 5 números de um grupo de 80 números. Quantos são os resultados possíveis de um sorteio semanal e qual a probabilidade de acertar o prêmio?

14. O fabricante de microcomputadores decidiu vender pela internet unidades padronizadas definidas pelo computador. Para começar estabeleceu as seguintes alternativas: dois tipos de CPU, duas memórias RAM, três capacidades de discos rígidos e quatro tipos de monitores. Quantas configurações são possíveis de montar?

15. *Lei de Benford*[7].

"O professor Theodore P. Hill pede sempre uma lição de casa especial para seus alunos de matemática, no Instituto de Tecnologia da Geórgia. Parte deles deve lançar uma moeda duzentas vezes e registrar fielmente seu resultado, enquanto a outra simplesmente deve fingir que jogou a moeda e inventar um resultado para os duzentos supostos arremessos. No dia seguinte, para espanto dos alunos, Hill consegue, com breve olhada nos trabalhos, apontar quase todos os que fraudaram os lançamentos. A verdade, disse ele em uma entrevista*, é que a maioria das pessoas não sabe quais são as reais probabilidades de um exercício como esse e, portanto, não consegue inventar dados convincentes*. ... Em algum ponto de uma série de duzentos arremessos de moeda, ou cara ou coroa aparecerá seis ou mais vezes seguidas. Aqueles que fraudaram um resultado não sabiam disso e evitaram simular longas sequências de caras ou coroas, porque, erroneamente, pensaram ser improvável." Verifique a afirmação do professor Hill na coluna B do *modelo* Simulação.

[7] Do artigo *Aplicação do teorema pode indicar fraudes* de Malcom W. Browne publicado no jornal O Estado de São Paulo, 9/8/1998.