

# Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

1.
  - a. Estabeleça as condições exigidas para se aplicar a distribuição binomial?
  - b. Qual é a probabilidade de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?
  - c. Qual é a probabilidade de menos que 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?

## Solução

a. A distribuição binomial é usada para encontrar a probabilidade de X números de ocorrências ou sucessos de um evento,  $P(X)$ , em n tentativas do mesmo experimento quando (1) existirem somente 2 resultados mutuamente exclusivos, (2) as n tentativas são independentes, e (3) a probabilidade de ocorrência ou sucesso, p, permanece constante em cada tentativa

$$b. P(X) = nC_x p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Em muitos livros,  $1 - p$  (a probabilidade de fracasso) é definida como q. Aqui  $n = 5$ ,  $X = 3$ ,  $p = \frac{1}{2}$ , e  $q = \frac{1}{2}$ . Substituindo estes valores na equação acima, obtemos:

$$P(3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \left(\frac{1}{32}\right) = 0,3125$$

No Excel poderíamos construir uma planilha para resolver este item do problema assim:

	A	B	C
1	<b>Dados</b>		<b>Descrição</b>
2	3		O número de tentativas bem-sucedidas
3	5		O número de tentativas independentes
4	0,5		A probabilidade de sucesso em cada tentativa
5	<b>Fórmula</b>		<b>Descrição (resultado)</b>
6	0,312500	<code>&lt;---=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)</code>	A probabilidade de exatamente 3 de 5 tentativas serem bem-sucedidas (0,312500)

Você poderia também usar o procedimento que desenvolvemos em Javascript para a realização deste cálculo. Assim

The screenshot shows a web browser window with the URL `http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/binomial.ht`. The page content includes:

- Entrada:**
  - Probabilidade Sucesso: 0.5
  - Número de Sucessos: 3
  - Número de Tentativas: 5
  - Buttons: [Calcular], [Inverter], [Limpar]
  - CI: 95%
  - Link: [Ajuda Binomial](#)
- PROBABILIDADES BINOMIAIS:**

Massa	Acumulada
p( 0): 0.03125000;	p(> 0): 0.96875000
p( 1): 0.15625000;	p(> 1): 0.81250000
p( 2): 0.31250000;	p(> 2): 0.50000000
p( 3): 0.31250000;	p(> 3): 0.18750000
- \*\*\* resumo \*\*\***
  - Probabilidade Observada= 3: 0.31250000 (nota, todas as probabilidades baseadas na esperança= 2.5)
  - probabilidades unilaterais:
    - Observada=3: 0.500000 (Observada<3: 0.500000)
    - Observada>3: 0.187500 (Observada<=3: 0.812500)
  - p-Médio: 0.343750; esquerda: 0.65625; dupla: 0.68750

## Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

O link<sup>1</sup> é:

<http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/binomial.htm>

c.  $P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$P(0) = \frac{5!}{0!(5-0)!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{5!}{0!5!} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5.4.3.2.1}{1.5.4.3.2.1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{32}\right) = 0,03125$$

$$P(1) = \frac{5!}{1!(5-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5.4.3.2.1}{1.4.3.2.1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \left(\frac{1}{32}\right) = 0,15625$$

$$P(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1.3.2.1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \left(\frac{1}{32}\right) = 0,3125$$

Então,

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5$$

Numa planilha Excel teríamos:

	A	B	C	D
1	Dados			
2	0	1	2	
3	5			
4	0,5			
5	Cálculo			
6	0,03125	0,15625	0,3125	<--=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;FALSO)
7			0,5	<--=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;VERDADEIRO)

2. a. Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja  $\frac{1}{4}$ . Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros?

b. Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes?

### Solução

a. Aqui  $n = 6$ ,  $X = 3$ ,  $p = 1/4$ , e  $q = 3/4$ . Substituindo estes valores na fórmula binomial, obtemos

$$P(3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.3.2.1} \left(\frac{1}{64}\right) \left(\frac{27}{64}\right) = 20 \left(\frac{27}{4096}\right) = \frac{540}{4096} \cong 0,13$$

No Excel poderíamos construir uma planilha para resolver este item do problema assim:

<sup>1</sup>Outras distribuições poderão ser calculadas neste site: <http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/index.html>

## Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

	A	B
1	Dados	
2	3	
3	6	
4	0,25	
5	Fórmula	
6	0,131836	<---=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)

Você poderia também usar o procedimento que desenvolvemos em Javascript para a realização deste cálculo. Assim

Binomial

Entrada:

Probabilidade Sucesso	0.25
Número de Sucessos	3
Número de Tentativas	6

Calcular Alt  
Inverter  
95%  
Ajuda Binomial

p( 3): 0.13183593; p(> 3): 0.03759765

\*\*\* resumo \*\*\*

Probabilidade Observada= 3: 0.13183593  
(nota, todas as probabilidades baseadas na esperança= 1.5)

probabilidades unilaterais:  
Observada>3: 0.169433 (Observada<3: 0.830566)  
Observada>3: 0.037597 (Observada<=3: 0.962402)  
p-Médio: 0.103515; esquerda: 0.89648; dupla: 0.20703

Probabilidades bilaterais:  
Diferença Exp-Obs>=1.5: 0.16943359  
Diferença Exp-Obs>1.5: 0.03759765  
p-Médio: 0.10351562  
Bilateral de acordo com a soma de pequenos p's

\*\*\*Aproximações Normais\*\*\*

Você deu o número observado como: 3

Limpar

O link<sup>2</sup> é:

<http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/binomial.htm>

b. Aqui  $n = 4$ ,  $X \geq 3$ ,  $p = 0,3$  e  $1 - p = 0,7$

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4)$$

$$P(3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} (0,3)^3 (0,7)^{4-3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} (0,27)(0,7) = 4(0,0189) = 0,0756$$

$$P(4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} (0,3)^4 (0,7)^0 = (0,3)^4 (0,7)^0 = (0,3)^4 = 0,0081$$

$$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0,0756 + 0,0081 = 0,0837$$

<sup>2</sup>Outras distribuições poderão ser calculadas neste site: <http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/index.html>

## Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

3. a. Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?
- b. Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

### Solução

a. Aqui  $n = 10$ ,  $X \leq 2$ ,  $p = 0,2$  e  $1 - p = 0,8$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(0) = \frac{10!}{0!(10-0)!} (0,2)^0 (0,8)^{10} = 0,1074$$

$$P(1) = \frac{10!}{1!(10-1)!} (0,2)^1 (0,8)^9 = 10 (0,2)(0,1342) = 0,2684$$

$$P(2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} (0,2)^2 (0,8)^8 = 45 (0,04)(0,1677) = 0,3020$$

Assim,

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,1074 + 0,2684 + 0,3020 = 0,6778 \text{ ou } 67,8\%$$

	A	B	C	D
1	<b>Dados</b>			
2	0	1	2	
3	10			
4	0,2			
5	<b>Cálculo</b>			
6	0,107374182	0,268435456	0,301989888	<--=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;FALSO)
7			<b>0,67779953</b>	<--=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;VERDADEIRO)

b. Aqui  $n = 15$ ,  $X = 10$ ,  $p = 0,85$  e  $1 - p = 0,15$ . A probabilidade de  $X = 10$  itens aceitáveis com  $p = 0,85$  é igual a probabilidade de  $X = 5$  itens defeituosos com  $p = 0,15$ . Mas fazendo os cálculos encontramos:

$$P(5) = \frac{15!}{5!(15-5)!} (0,15)^5 (0,85)^{10} = 3003 (0,00007594)(0,1968744) = 0,0449 \text{ ou } 4,5\%$$

	A	B
1	<b>Dados</b>	
2	10	
3	15	
4	0,85	
5	<b>Fórmula</b>	
6	0,044895	<--=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)

3. a. Se 4 moedas honestas forem lançadas simultaneamente (ou 1 moeda honesta for lançada 4 vezes), calcule a distribuição de probabilidade completa e desenhe-a num gráfico
- b. Calcule e trace o gráfico da distribuição de probabilidade para uma amostra de 5 itens tomada aleatoriamente de um processo de produção sabido produzir 30% de itens defeituosos

### Solução

a. Usando  $n = 4$ ;  $X = 0Ca, 1Ca, 2Ca, 3Ca$  ou  $4Ca$ ;  $P = 1/2$ , obtemos:

## Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

	A	B	C	D	E	F
2	0	1	2	3	4	
3	4					
4	0,5					
5	<b>Cálculo</b>					
6	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625	<---=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;FALSO)
7					<b>1</b>	<---=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;VERDADEIRO)

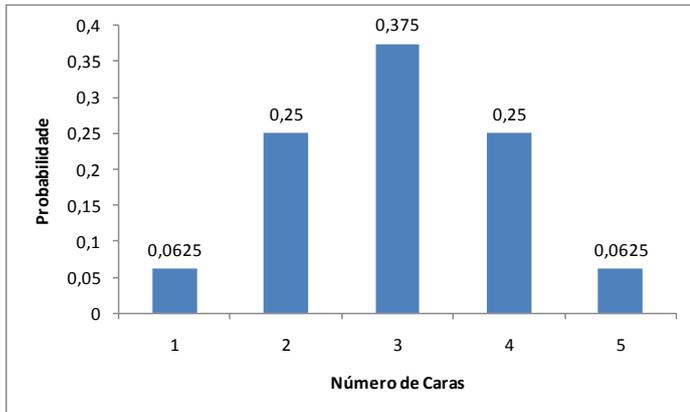


Figura – Distribuição de Probabilidades de Caras no Lançamento de 4 Moedas Honestas.

Note na figura que quando  $p = 0,5$ , a distribuição de probabilidade é simétrica.

b. Usando  $n = 5$ ;  $X = 0, 1, 2, 3, 4$  ou  $5$  defeituosas;  $p = 0,3$ , obtemos

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Dados</b>						
2	0	1	2	3	4	5	
3	5						
4	0,3						
5	<b>Cálculo</b>						
6	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243	<---=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;FALSO)
7						<b>1</b>	<---=DISTRBINOM(C2;\$A\$3;\$A\$4;VERDADEIRO)

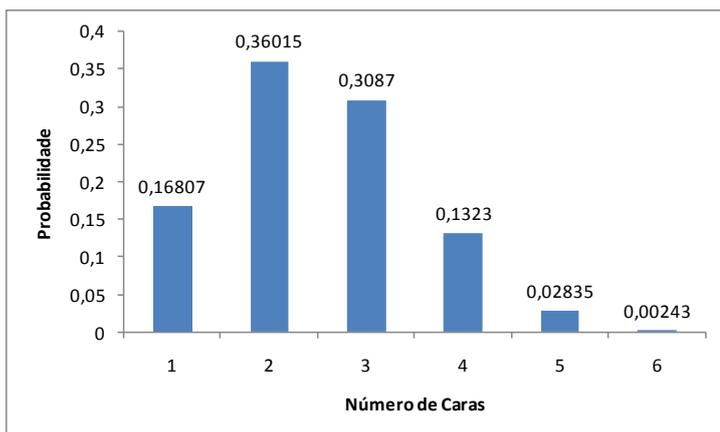


Figura – Distribuição de Probabilidades de Itens Defeituosos numa amostra de 5 itens extraídos aleatoriamente de um processo de produção que se sabe produzir 30% de itens defeituosos.

Note na figura que quando  $p < 0,5$ , a distribuição de probabilidade é assimétrica para a direita.

4. Calcule o valor esperado e o desvio padrão e determine a simetria ou assimetria da distribuição de probabilidade de

- a. Exercício 2 a.    b. Exercício 2 b.    c. Exercício 3 a.    d. Exercício 3 b.

### Solução

a.  $E(X) = \mu = n \cdot p = 6 \cdot (1/4) = 3/2 = 1,5$  filhos loiros.

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \sqrt{1,125} \cong 1,06 \text{ filhos loiros}$$

## Exercícios Resolvidos da Distribuição Binomial

---

Como  $p < 0,5$ , a distribuição de probabilidade de crianças loiras é assimétrica à direita.

b.  $E(X) = \mu = n.p = 4.(0,3) = 1,2$  disparos.

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4(0,3)(0,7)} = \sqrt{0,84} \cong 0,92 \text{ disparos}$$

Como  $p < 0,5$ , a distribuição de probabilidade é assimétrica à direita.

c.  $E(X) = \mu = n.p = 10.(0,2) = 2$  tubos defeituosos.

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10(0,2)(0,8)} = \sqrt{1,6} \cong 1,26 \text{ tubos defeituosos}$$

Como  $p < 0,5$ , a distribuição de probabilidade é assimétrica à direita.

d.  $E(X) = \mu = n.p = 15.(0,85) = 12,75$  itens aceitáveis.

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15(0,85)(0,15)} = \sqrt{1,9125} \cong 1,38 \text{ itens aceitáveis}$$

Como  $p > 0,5$ , a distribuição de probabilidade é assimétrica à esquerda.