1.

a. Estabeleça as condições exigidas para se aplicar a distribuição binomial?

b. Qual é a probabilidade de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?

c. Qual é a probabilidade de menos que 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?

Solução

a. A distribuição binomial é usada para encontrar a probabilidade de X números de ocorrências ou sucessos de um evento, P(X), em n tentativas do mesmo experimento quando (1) existirem somente 2 resultados mutuamente exclusivos, (2) as n tentativas são independentes, e (3) a probabilidade de ocorrência ou sucesso, p, permanece constante em cada tentativa

b. $P(X) = nC_X p^X (1-p)^{n-X} = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$

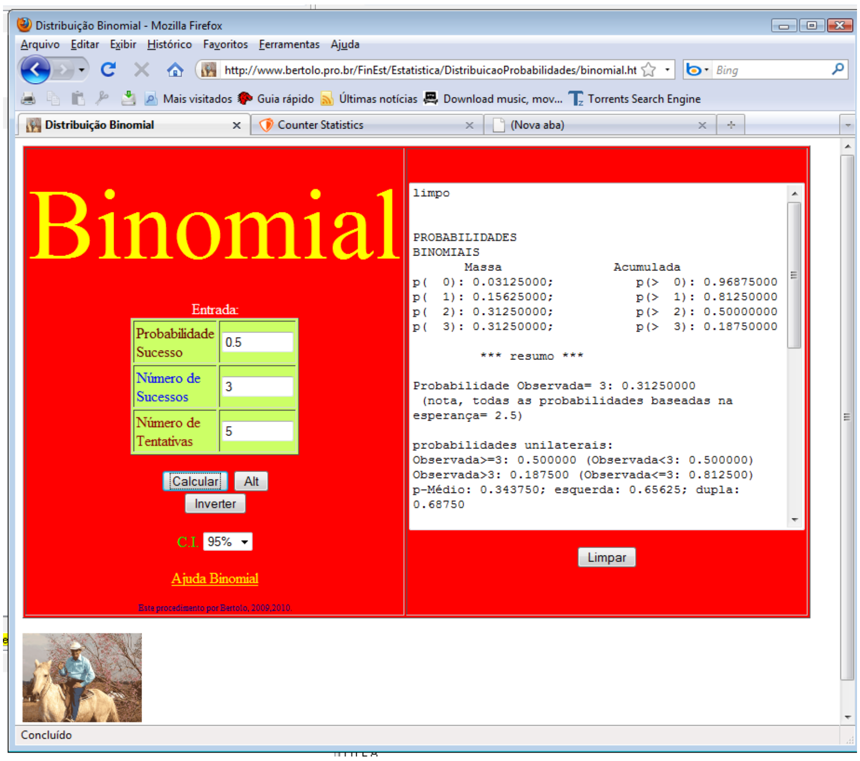
Em muitos livros, 1 – p(*a probabilidade de fracasso*) é definida como q. Aqui n = 5, X = 3, p = ½, e q = ½. Substituindo estes valores na equação acima, obtemos:

$$P(3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\left(\frac{1}{32}\right) = 0{,}3125$$

No Excel poderíamos construir uma planilha para resolver este item do problema assim:

	A	B	C
1	**Dados**		**Descrição**
2	3		O número de tentativas bem-sucedidas
3	5		O número de tentativas independentes
4	0,5		A probabilidade de sucesso em cada tentativa
5	**Fórmula**		**Descrição (resultado)**
6	0,312500	<--=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)	A probabilidade de exatamente 3 de 5 tentativas serem bem-sucedidas (0,312500)

Você poderia também usar o procedimento que desenvolvemos em *Javascript* para a realização deste cálculo. Assim



O link[1] é:

http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/binomial.htm

c. P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)

$$P(0) = \frac{5!}{0!\,(5-0)!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{5!}{0!\,5!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5.4.3.2.1}{1.5.4.3.2.1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{32}\right) = 0{,}03125$$

$$P(1) = \frac{5!}{1!\,(5-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5!}{1!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5.4.3.2.1}{1.4.3.2.1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5\left(\frac{1}{32}\right) = 0{,}15625$$

$$P(2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5.4.3.2.1}{2.1.3.2.1}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\left(\frac{1}{32}\right) = 0{,}3125$$

Então,

P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)= 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 = 0,5

Numa planilha Excel teríamos:

	A	B	C	D
1	Dados			
2	0	1	2	
3	5			
4	0,5			
5	Cálculo			
6	0,03125	0,15625	0,3125	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;FALSO)
7			**0,5**	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;VERDADEIRO)

2. a. Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja ¼. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros?

   b. Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes?

Solução

a. Aqui n = 6, X = 3, p = 1/4, e q = 3/4. Substituindo estes valores na fórmula binomial, obtemos

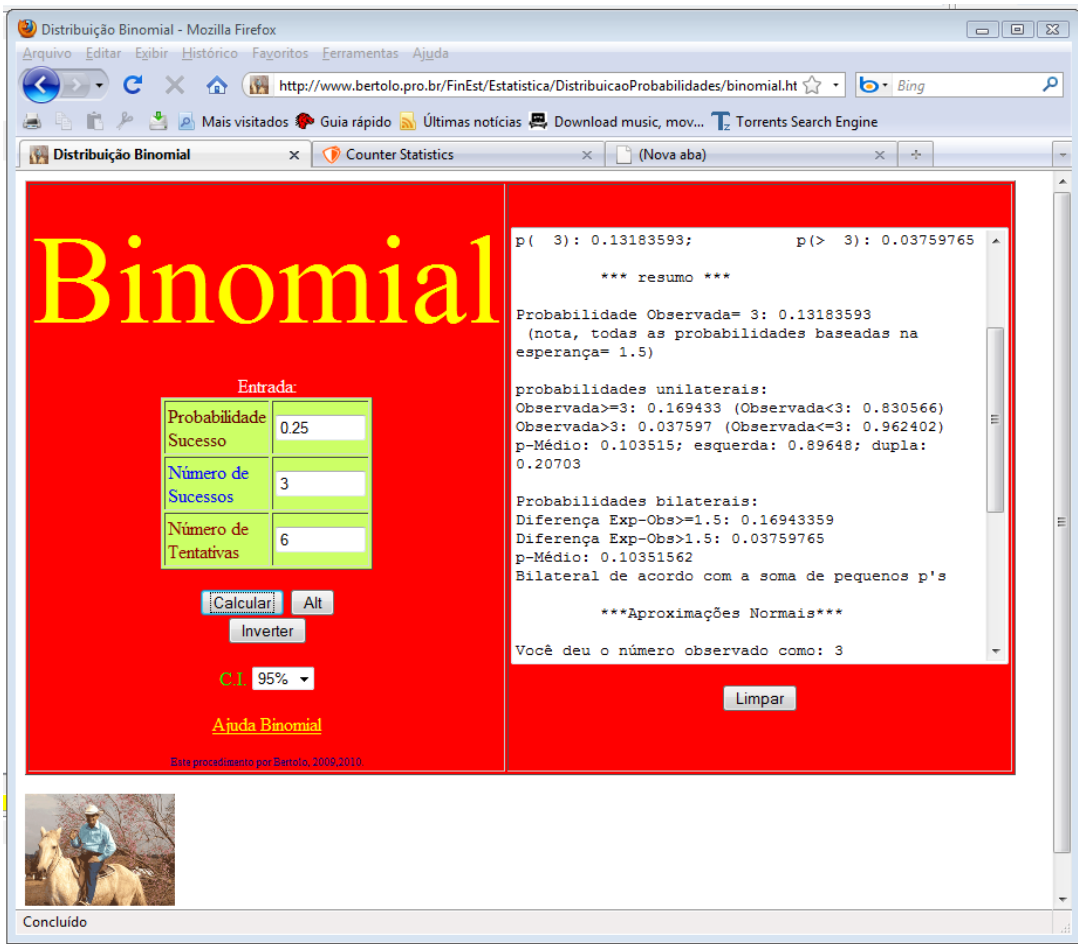
$$P(3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.3.2.1}\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{64}\right) = 20\left(\frac{27}{4096}\right) = \frac{540}{4096} \cong 0{,}13$$

No Excel poderíamos construir uma planilha para resolver este item do problema assim:

[1]Outras distribuições poderão ser calculadas neste site: http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/index.html

	A	B
1	**Dados**	
2	3	
3	6	
4	0,25	
5	**Fórmula**	
6	0,131836	<--=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)

Você poderia também usar o procedimento que desenvolvemos em Javascript para a realização deste cálculo. Assim



O link[2] é:

http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades/binomial.htm

b. Aqui n = 4, X ≥ 3, p = 0,3 e 1 − p = 0,7

P(X ≥ 3) = P(3) + P(4)

$$P(3) = \frac{4!}{3!\,(4-3)!}(0{,}3)^3(0{,}7)^{4-3} = \frac{4.3.2.1}{3.2.1.1}(0{,}27)(0{,}7) = 4(0{,}0189) = 0{,}0756$$

$$P(4) = \frac{4!}{4!\,(4-4)!}(0{,}3)^4(0{,}7)^0 = (0{,}3)^4(0{,}7)^0 = (0{,}3)^4 = 0{,}0081$$

P(X ≥ 3) = P(3) + P(4) = 0,0756 + 0,0081 = 0,0837

[2]Outras distribuições poderão ser calculadas neste site: http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/index.html

3. a. Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubos que se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos?

   b. Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Solução

a. Aqui $n = 10$, $X \leq 2$, $p = 0{,}2$ e $1 - p = 0{,}8$

$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$P(0) = \frac{10!}{0!\,(10-0)!}(0{,}2)^0(0{,}8)^{10} = 0{,}1074$$

$$P(1) = \frac{10!}{1!\,(10-1)!}(0{,}2)^1(0{,}8)^9 = 10\,(0{,}2)(0{,}1342) = 0{,}2684$$

$$P(2) = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}(0{,}2)^2(0{,}8)^8 = 45\,(0{,}04)(0{,}1677) = 0{,}3020$$

Assim,

$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}1074 + 0{,}2684 + 0{,}3020 = 0{,}6778$ ou 67,8%

	A	B	C	D
1	Dados			
2	0	1	2	
3	10			
4	0,2			
5	Cálculo			
6	0,107374182	0,268435456	0,301989888	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;FALSO)
7			**0,67779953**	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;VERDADEIRO)

b. Aqui $n = 15$, $X = 10$, $p = 0{,}85$ e $1 - p = 0{,}15$. A probabilidade de $X = 10$ itens aceitáveis com $p = 0{,}85$ é igual a probabilidade de $X = 5$ itens defeituosos com $p = 0{,}15$. Mas fazendo os cálculos encontramos:

$P(5) = \frac{15!}{5!(15-5)!}(0{,}15)^5(0{,}85)^{10} = 3003\,(0{,}00007594)(0{,}1968744) = 0{,}0449$ ou 4,5%

	A	B
1	Dados	
2	10	
3	15	
4	0,85	
5	Fórmula	
6	0,044895	<--=DISTRBINOM(A2;A3;A4;FALSO)

3. a. Se 4 moedas honestas forem lançadas simultaneamente (ou 1 moeda honesta for lançada 4 vezes), calcule a distribuição de probabilidade completa e desenhe-a num gráfico

   b. Calcule e trace o gráfico da distribuição de probabilidade para uma amostra de 5 itens tomada aleatoriamente de um processo de produção sabido produzir 30% de itens defeituosos

Solução

a. Usando $n = 4$; $X = 0Ca, 1Ca, 2Ca, 3Ca$ ou $4Ca$; $P = 1/2$, obtemos:

	A	B	C	D	E	F
2	0	1	2	3	4	
3	4					
4	0,5					
5			Cálculo			
6	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;FALSO)
7					**1**	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;VERDADEIRO)

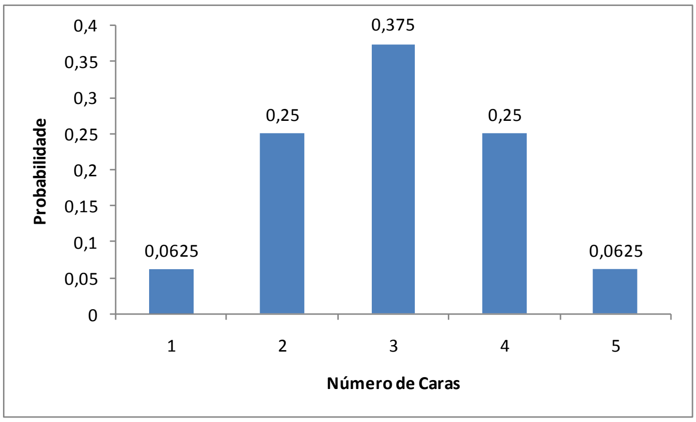


Figura – Distribuição de Probabilidades de Caras no Lançamento de 4 Moedas Honestas.

Note na figura que quando p = 0,5, a distribuição de probabilidade é simétrica.

b. Usando n = 5; X = 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 defeituosas; p = 0,3, obtemos

	A	B	C	D	E	F	G
1				Dados			
2	0	1	2	3	4	5	
3	5						
4	0,3						
5				Cálculo			
6	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;FALSO)
7						**1**	<--=DISTRBINOM(C2;A3;A4;VERDADEIRO)

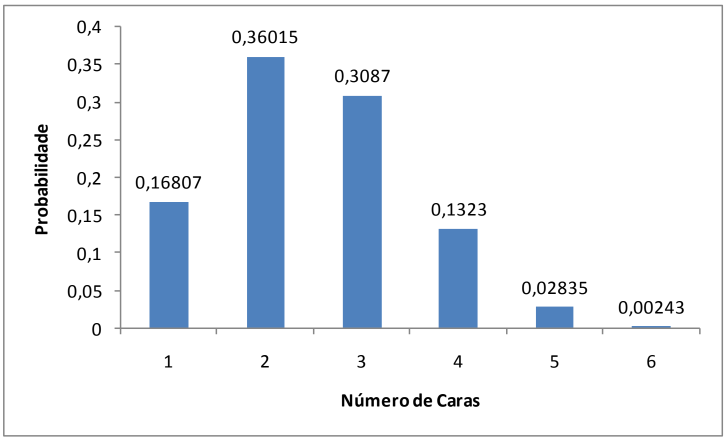


Figura – Distribuição de Probabilidades de Itens Defeituosos numa amostra de 5 itens extraídos aleatoriamente de um processo de produção que se sabe produzir 30% de itens defeituosos.

Note na figura que quando p < 0,5, a distribuição de probabilidade é assimétrica para a direita.

4. Calcule o valor esperado e o desvio padrão e determine a simetria ou assimetria da distribuição de probabilidade de

   a. Exercício 2 a. b. Exercício 2 b. c. Exercício 3 a. d. Exercício 3 b.

Solução

a. $E(X) = \mu = n.p = 6.(1/4) = 3/2 = 1,5$ filhos loiros.

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \sqrt{1{,}125} \cong 1{,}06\ \textit{filhos loiros}$$

Como $p < 0{,}5$, a distribuição de probabilidade de crianças loiras é assimétrica à direita.

b. $E(X) = \mu = n.p = 4.(0{,}3) = 1{,}2$ disparos.

$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4(0{,}3)(0{,}7)} = \sqrt{0{,}84} \cong 0{,}92\ disparos$

Como $p < 0{,}5$, a distribuição de probabilidade é assimétrica à direita.

c. $E(X) = \mu = n.p = 10.(0{,}2) = 2$ tubos defeituosos.

$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10(0{,}2)(0{,}8)} = \sqrt{1{,}6} \cong 1{,}26\ tubos\ defeituosos$

Como $p < 0{,}5$, a distribuição de probabilidade é assimétrica à direita.

d. $E(X) = \mu = n.p = 15.(0{,}85) = 12{,}75$ itens aceitáveis.

$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15(0{,}85)(0{,}15)} = \sqrt{1{,}9125} \cong 1{,}38\ itens\ aceitáveis$

Como $p > 0{,}5$, a distribuição de probabilidade é assimétrica à esquerda.