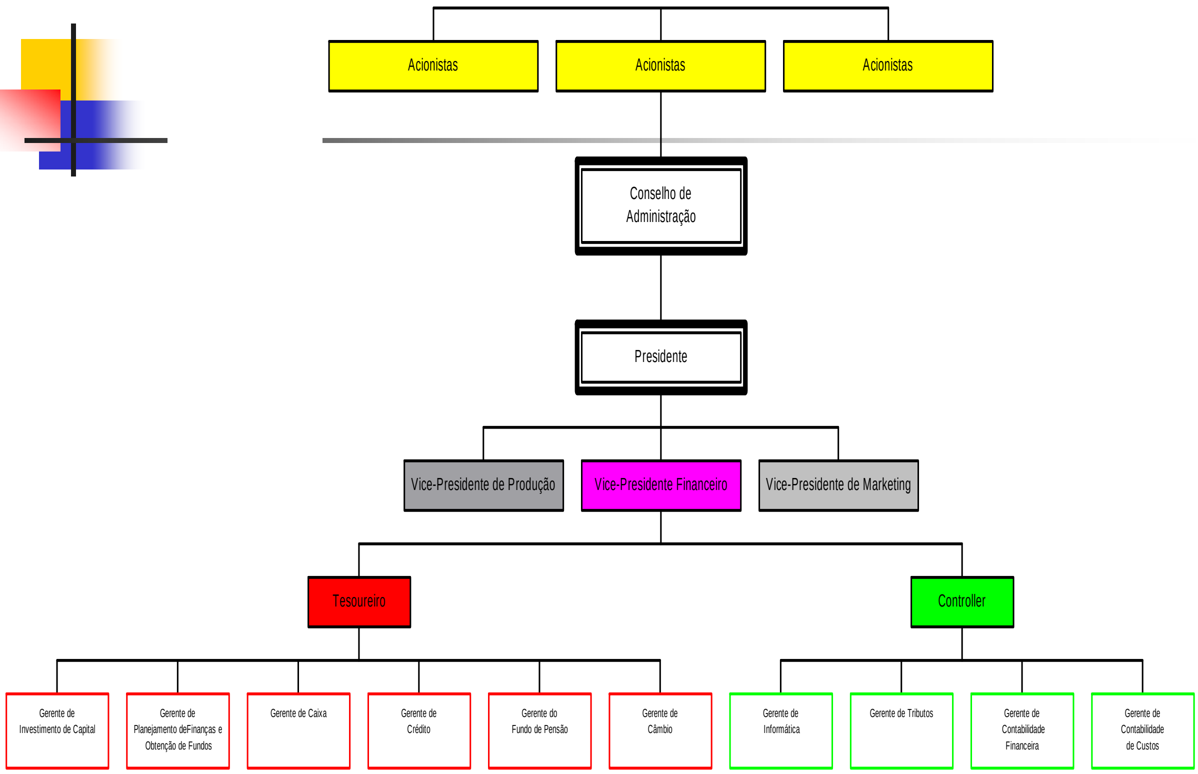
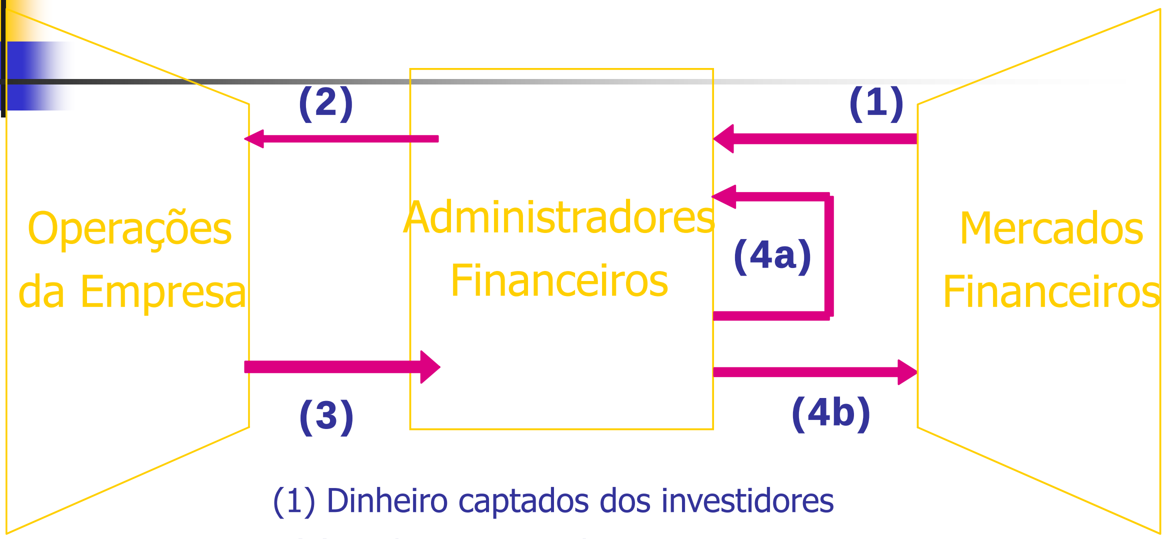
CAPÍTULO 6

Análise de Investimentos com Risco no Excel e Na HP-12C

Organograma de uma Corporação



O Papel do Administrador Financeiro



(1) Dinheiro captados dos investidores
(2) Dinheiro investido na empresa
(3) Dinheiro gerado pelas operações
(4a) Dinheiro reinvestido
(4b) Dinheiro retornado aos investidores

Áreas Básicas de Preocupação do Administrador Financeiro

No capítulo 1, identificamos três áreas básicas de preocupação do administrador financeiro:

- Quais investimentos de longo-prazo a empresa deveria fazer? *Decisão de Investimento*
- Onde obteremos financiamentos de longo-prazo para pagar pelos investimentos? *Decisão de Financiamento*
- Como administraremos as atividades financeiras diárias da empresa?*Administração de Capital de Giro*

Julgamento do Sucesso

O sucesso é julgado pelo **valor**. Os acionistas ficam em melhor situação com qualquer decisão que aumente o valor de sua posição.

Assim, pode-se dizer que uma boa *decisão* de investimento é aquela que resulta na “compra” de uma ativo (real ou financeiro) que vale mais do que custa, ou seja, um ativo que traga uma contribuição líquida positiva para o valor da empresa.

O segredo do sucesso em Finanças é **maximizar a riqueza** dos acionistas.

Decisão...

Somente os administradores financeiros tomam decisões na vida?

Desde que acordamos até ao deitarmos, tomamos inúmeras decisões nas nossas vidas, particular e profissional.

O que é tomar decisão?

É traçar (delinear) ações agora e que serão executadas no FUTURO.

Estas ações resultarão sempre num resultado DESEJADO? Por quê?

O Futuro

Porque o futuro é INCERTO.

Na vida temos apenas duas certezas: a **morte** e os **impostos**.

Esta visão fundamental da natureza e da iniciativa do homem sugere que a maioria dos fenômenos terrenos inclui um elemento de incerteza e de imprevisibilidade. A Bíblia faz a mesm observação com relação aos esforços humanos: "O tempo e a oportunidade acontecem para todos

Entendendo o Futuro.

O futuro pode ser entendido em três situações:

1. Situação Determinística.
2. Situação de Risco.
3. Situação de Incerteza Total

Situação Determinística

Existem coisas que temos certeza que acontecerão e nos resta apenas torná-las melhor....Por exemplo, reduzindo os custos operacionais da minha empresa terei um lucro maior. O lucro depende de várias variáveis de decisão (salários, custo da mercadoria, etc.). Estas variáveis poderão ter restrições. Podemos, então, ajustá-las, obedecendo às restrições, de tal forma que o lucro seja Máximo.
Este tipo de problemas determinísticos é resolvido por técnicas matemáticas chamadas de OTIMIZAÇÃO. Aqui, geralmente, NÃO entra estatística.
Outro exemplo: Andando SEMPRE a 100 km/h, tenho certeza que levarei 2 horas para percorrer 200 km.
Toda a física clássica é determinística (cartesiana). O próprio Einstein acreditava tanto nisso que disse uma vez "Deus não joga Dados". Ele acreditava que para tudo existia uma equação que governava e que conhecendo o presente, o futuro estaria determinado por meio desta equação.

Situação de Risco

Existem outras coisas que NÃO temos certeza que acontecerão, mas existe uma chance (probabilidade) de acontecer. Podemos modelar esta situação por meio de variáveis estocásticas (aleatórias, ao acaso) obedecendo certas distribuições de probabilidade. Pelo palavreado deu para notar que aqui a estatística entra de "sola". Então, onde houver risco, a estatística estará presente para modelar a situação. E você, acredita que as coisas no futuro acorrerão mais vezes de maneira determinística ou com risco?

Situação de Incerteza Total

Qual o dia e a hora que o Bertolo vai morrer? Estas e outras perguntas a respeito do futuro não podem ser modeladas por simples métodos estatísticos. O Bertolo vai morrer uma vez só, não tem como a gente dizer que em média ele morrerá catastroficamente no dia 11/09/2012 (para a alegria de muita gente).

A matemática tem dado uns "tiros" na modelagem desta situação, através da chamada teoria dos jogos e outras técnicas sofisticadas.

Atitudes diante o Risco

Como a vida é cheia de riscos e incertezas. Há, então, pessoas:

- que jogam loteria ou roleta;
- há aquelas que são toureiros ou astronautas;
- outros aceitam gerenciar empresas quebradas;
- outros se atrevem a serem prefeitos;
- há empresários visionários (e exitosos);
- há eternos enamorados que se entregam por completo, etc.
- há quem renuncia um cômodo emprego que não apresenta defeitos ou ameaças;
- há quem nunca joga e nunca será espontâneo em uma praça de touros de Madri;
- Outros, dizem que "um bom investimento deve ser feito tendo em conta que não tire o sono, ainda que não dê para se comer muito bem"
- Por último, alguns que nunca saem de si mesmos porque a entrega total lhes dá medo.

Todas estas diferenças no comportamento humano devem-se às diferentes **atitudes diante o risco.**

Mesmo uma única pessoa reage a esse fato da vida de várias maneiras:

- Em algumas situações, optamos por ignorar a incerteza;
- Em outras, tentamos lidar com ela explicitamente.

Existem situações em que o nível de incerteza é alto demais para ser ignorado, e devemos como gestores, levá-lo em conta.

Há muitos exemplos: todo o setor de seguros é um deles.

Outros exemplos incluem investimentos em ações, títulos e bens imóveis, assim como qualquer atividade na qual um produto é criado antecipadamente à demanda.

Geralmente progredimos planejando os resultados piores, embora esperemos que aconteça o melhor. A maioria de nós está aflitivamente ciente da experiência de que existem muitos **riscos** e **incertezas** associados a qualquer tentativa de negócios.

A **matemática** pode ajudá-lo. E com toda certeza de agora em diante ela vai ajudá-lo muito nas tomadas de decisões. O nosso objetivo aqui é apontar instrumentos úteis para que você ultrapasse essas barreiras.

Ativos Financeiros e Não Financeiros

O retorno que exigimos de uma proposta de investimento NÃO FINANCEIRO precisa ser, no mínimo, tão alto quanto o que podemos obter comprando ativos FINANCEIROS de risco semelhante.

Os fluxos de caixa futuros gerados pelo projeto podem, inesperadamente, aumentar ou diminuir. A taxa pela qual os futuros fluxos de caixa foram investidos pode não permanecer a mesma.

Existem muitos fatores que podem reduzir os fluxos de caixa esperados: perda de participação no mercado, aumento no custo das mercadorias vendidas, novas regulamentações ambientais, aumento no custo do financiamento.

Dessa forma, a principal tarefa dos analistas de investimentos é selecionar projetos sob condições de incerteza.

Vamos inicialmente tratar apenas de **ativos financeiros** devido a facilidade de obter informações. Porém o que faremos aqui pode ser estentido para ativos não financeiros ou reais. Ainda, vamos apenas tratar da situação de risco!

Papo Inicial

Suponhamos que você dispusesse de R$ 100.000,00 para aplicar no *mercado financeiro*. Você poderia aplicar a totalidade de seus recursos na compra de ações, por exemplo, da Cia. de Petróleo Brasileiro – Petrobrás. Talvez um colega seu de curso o orientasse a "não colocar todos os ovos na mesma cesta" e lhe aconselhasse a diversificar sua aplicação, comprando também ações da Companhia Vale do Rio Doce. O seu problema seria: como dividir os R$ 100.000,00 entre as duas ações?

Você poderia diversificar ainda mais os seus investimentos, canalizando uma parte dos R$ 100.000,00 para uma caderneta de poupança da Caixa Econômica Federal, outra parte para certificados de depósitos bancários do Banco Bradesco e o restante para a compra de ações da Aracruz Celulose S.A., Gerdau S.A., Lojas Americanas S.A., Bradesco S.A.. Novamente, você defrontaria com o problema de como alocar seus R$ 100.000,00 entre alternativas distintas de investimento.

Você já imaginou quantas combinações de investimentos poderiam ser feitas? Como decidir entre a compra de ações da Aracruz e da Gerdau? Quantos reais destinar à compra das ações da Aracruz? Por que diversificar os investimentos?

Papo Inicial

Há muitas alternativas de investimento no *mercado financeiro*, e a existência de alternativas leva o investidor a defrontar com uma tomada de decisão ou **problema de escolha**: comprar ações da Petrobras ou da Vale do Rio Doce? Ou comprar ações das duas companhias?

Um dos objetivos de nosso estudo do Cap. 6 é apresentar a você um método que lhe possibilite escolher entre diferentes tipos de investimento. Em outras palavras, apresentar-lhe um método que o ajude a tomar uma decisão menos sujeita a erros face a incerteza quanto aos resultados esperados. Nesse método, você estimará e avaliará as relações entre o *retorno esperado* e o *risco* do investimento em ativos financeiros. Para medir retorno e risco de investimentos, é preciso que você saiba usar as seguintes medidas estatísticas: média, variância, desvio-padrão, covariância e coeficiente de correlação. Faça uma revisão dessas medidas no seu livro de estatística antes de iniciar o estudo deste capítulo.

O que é Risco?

Risco, para a maioria de nós, refere-se à probabilidade que nos jogos de sorte da vida se conseguir um resultado que nós não gostaríamos que acontecesse. Por exemplo, o risco de dirigir um carro muito rápido é conseguirmos uma multa por excesso de velocidade, ou pior ainda, sofrermos um acidente.

O dicionário *Webster*, de fato, define o risco como "exposição ao perigo ou ao azar". Assim, risco é percebido quase que completamente em termos negativos. Se você pratica pára-quedismo, você está arriscando sua vida – o pára-quedismo é arriscado. Se você aposta em cavalos, está arriscando seu dinheiro. Se você investe em ações especulativas (ou, para dizer a verdade, em qualquer ação), está assumindo um risco na esperança de obter um retorno apreciável.

Na linguagem das finanças, todavia, a palavra *risco* está associada a possibilidade de os **retornos** proporcionados por um ativo serem inferiores aos **retornos esperados.** Nesse sentido, ***risco*** significa a "incerteza de resultados futuros" (REILLY; NORTON: 2008, p. 163)

O Risco em Finanças

Em finanças, então, nossa definição de risco é diferente e mais ampla. Risco, como se vê, refere-se à probabilidade de recebermos um retorno sobre um investimento que seja diferente do retorno esperado (maior ou menor). Assim, o risco inclui não somente os resultados *ruins*, isto é, retornos que estão abaixo daqueles esperados, mas também resultados *bons*, isto é, retornos que são maiores que os esperados. De fato, o espírito da nossa definição de risco em finanças é capturado melhor pelos símbolos Chineses para o risco, que estão reproduzidos abaixo:

危機

O primeiro símbolo é o símbolo do "perigo", enquanto o segundo é o símbolo da "oportunidade", tornando o risco uma mistura de *perigo* e *oportunidade*. Ele ilustra muito claramente o *tradeoff* que cada investidor e negócio têm de fazer – entre o maior prêmio que vem da oportunidade e o maior risco que tem nascido como uma conseqüência do perigo.

Corremos risco apenas em troca de um prêmio. Caso contrário, ficamos quietos!

Fontes de Risco

Fontes populares de risco para administradores financeiros e acionistas	
Fonte de risco	Descrição
Riscos específicos da empresa	
Risco Operacional	A possibilidade de que a empresa não seja capaz de cobrir seus custos de operação. Seu nível é determinado pela estabilidade das receitas da empresa (fixos) e pela estrutura de seus custos operacionais (variáveis)
Risco Financeiro	A possibilidade que a empresa não seja capaz de saldar suas obrigações financeiras. Seu nível é determinado pela previsibilidade dos fluxos de caixa operacionais da empresa e suas obrigações financeiras com encargos fixos.
Riscos específicos dos acionistas	
Risco de taxa de juros	A possibilidade de que as variações das taxas de juros afetem negativamente o valor de um investimento. A maioria dos investimentos perde valor quando a taxa de juros sobe e ganha valor quando ela cai.
Risco de liquidez	A possibilidade de que um ativo não possa ser liquidado com facilidade a um preço razoável. A liquidez é significativamente afetada pelo porte e pela profundidade do mercado no qual o ativo é costumeiramente negociado.
Risco de mercado	A possibilidade de que o valor de um ativo caia por causa de fatores de mercado independentes do ativo (como eventos econômicos, políticos e sociais). Em geral, quanto mais o valor do ativo reage ao comportamento do mercado, maior é seu risco; quanto menos reage, menor é seu risco.
Riscos para empresas e acionistas	
Risco de evento	A possibilidade de que um evento totalmente inesperado exerça efeito significativo sobre o valor da empresa ou um ativo específico. Esses eventos raros, como a decisão do governo de mandar recolher do mercado um medicamento popular, costumam afetar somente um pequeno grupo de empresas ou ativos.
Risco de câmbio	A exposição dos fluxos de caixa esperados para o futuro a flutuações das taxas de câmbio. Quanto maior a possibilidade de flutuações cambiais indesejáveis, maior o risco dos fluxos de caixa e, portanto, menor o valor da empresa ou do ativo.
Risco de poder aquisitivo	A possibilidade de que a variação dos níveis gerais de preços, causadas por inflação ou deflação na economia, afete desfavoravelmente os fluxos de caixa e o valor da empresa ou de um ativo. Normalmente, as empresas ou os ativos com fluxos de caixa que variam com os níveis gerais de preços apresentam risco mais baixo de variação de poder aquisitivo. Ao contrário, se os fluxos de caixa não variarem de acordo com os níveis gerais de preços, oferecem maior risco de poder aquisitivo.
Risco de tributação	A possibilidade de que mudanças adversas na legislação tributária venham a ocorrer. Empresas e ativos cujos valores são sensíveis a essas mudanças implicam maior risco.

Extraído do livro Princípios de Administração Financeira do Gitman, L.J. (p. 185 – Ed. Pearson – 10ª Ed.)

Como determinar o risco de um Ativo Financeiro?

Para mensurar o risco de um determinado *ativo financeiro*, como, por exemplo, uma ação, precisa-se saber, antes de tudo, como determinar os retornos que o ativo proporciona, e o retorno que se espera obter com a sua posse. Neste capítulo, enfocaremos o estudo do **risco** e **retorno** de um *ativo financeiro* de renda variável e que apresenta elevado grau de risco: as ações.

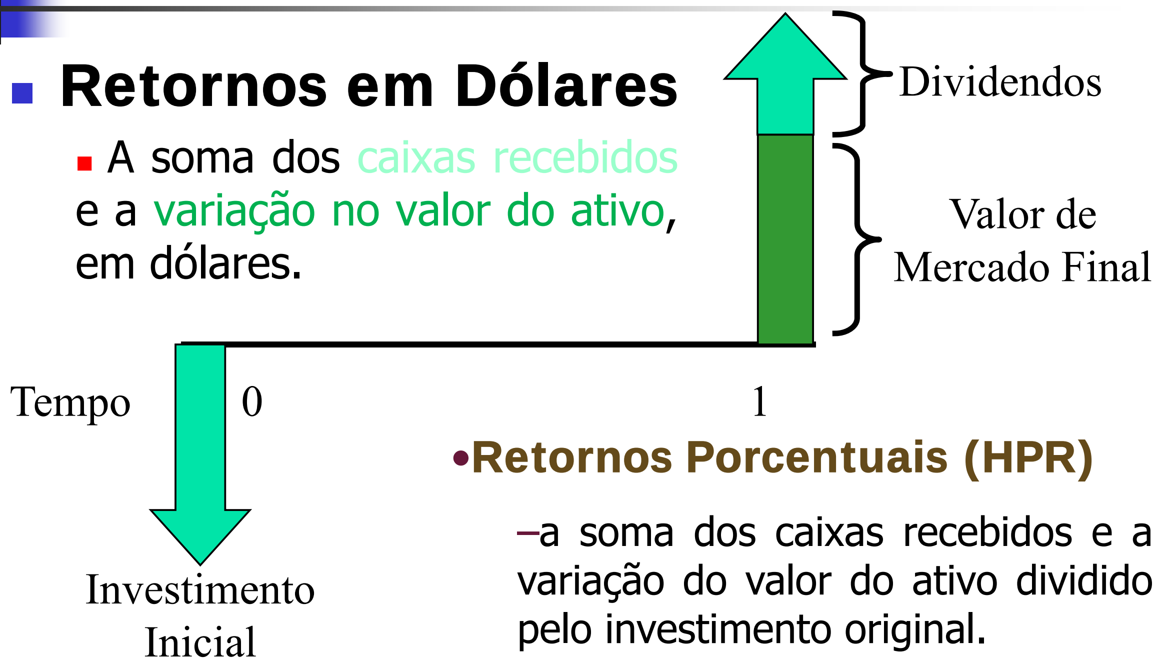
Análise de Risco em 3 Passos

Para demonstrar como o risco é visto em *finanças corporativas*, apresentaremos a análise de risco em três passos:

- Primeiro, *definiremos* o risco em termos da distribuição dos retornos reais ao redor de um retorno esperado.
- Segundo, *diferenciaremos* entre risco que é específico para um ou uns poucos investimentos E o risco que afetam a área alvo dos investimentos. Arguiremos que num mercado onde os investidores marginais são bem diversificados, é somente o último risco, o chamado **risco de mercado** que será recompensado.
- Terceiro, observaremos que *modelos alternativos* para medidas do risco e dos retornos esperados os acompanham.

Retornos Total e a Taxa de Retorno de 1 Ação

- **Retornos em Dólares**
  - A soma dos caixas recebidos e a variação no valor do ativo, em dólares.



- **Retornos Porcentuais (HPR)**
  - a soma dos caixas recebidos e a variação do valor do ativo dividido pelo investimento original.

Retornos Total e a Taxa de Retorno de 1 Ação

Retorno em Dólares = Dividendos + Variação no Valor de Mercado da ação (ganho ou perda de capital)

$$\text{retorno porcentual} = \frac{\text{retorno em dólares}}{\text{valor de mercado inicial}}$$

$$= \frac{\text{dividendo} + \text{variação no valor de mercado}}{\text{valor de mercado inicial}}$$

$$= \text{rendimento dos dividendos} + \text{rendimento do ganho de capital}$$

Retornos Total e a Taxa de Retorno de 1 Ação

Assim, o retorno para o acionista depende do desempenho da empresa emissora das ações e do comportamento das ações no mercado. Se a empresa conseguir gerar lucros, o acionista receberá dividendos. Além disso, com o passar do tempo, o preço de uma ação pode subir ou cair. Se o preço da ação aumenta acima do valor que foi pago pela sua compra, o acionista tem um ganho de capital; se o preço da ação diminui para um valor abaixo do preço que foi pago, o acionista experimenta uma perda de capital.

Exemplos

1. Suponhamos que você tenha tido a sorte de comprar ações da *General Eletric* no início de 1999, quando cada ação custava aproximadamente $ 102. No final do ano, o valor desse investimento havia valorizado para $ 155, dando um ganho de capital de $155 - $ 102 = $ 53. Além disso, em 1999 a *General Eletric* pagou dividendo (rendimento corrente) de $ 1,46 por ação.

$$\text{HPR} = \frac{\text{Ganho de Capital} + \text{Dividendos}}{\text{InvestimentoInicial}} = \frac{53 + 1{,}46}{102} = 0{,}534 \text{ ou } 53{,}4\%$$

Nunca se esqueça da inflação!!!!!

---

2. Suponhamos que você tenha comprado uma obrigação (*bonds*) por $ 1.020, com vencimento em 15 anos, pagando um cupom anual de $ 80. Um ano depois, as taxas de juros caíram, e o preço da obrigação aumentou para $ 1.050. Quais são suas taxas de retorno nominal e real? Suponha que a taxa de inflação tenha sido 4% neste ano.

Resp: 6,5%

$$1 + \text{taxa de retorno real anual} = \frac{1 + \text{taxa de retorno nominal anual}}{1 + \text{taxa de inflação anual}}$$

Exercícios

1. Mr.X comprou uma ação por R$ 15,60. Passada uma hora vendeu-a por R$ 15,80. Qual o retorno porcentual obtido nessa hora sem considerar os dividendos. DIRETO na HP-12C...Ficando BOM nisso.

2. Suponha que um ano atrás Mr X. comprou 100 ações da Companhia Inventada, SA por R$ 25. O dividendo pago por ação foi de 20 centavos. Suponha que acaba de vender a sua ação por R$ 30 (ex-dividendo). Qual foi o seu retorno? Qual o ganho de capital?

3. No início do ano uma ação está sendo vendida a $ 37. Se você comprar um lote de 100 ações e, durante o ano, a ação pague um dividendo de $ 1,85 e, no final do ano, o seu valor aumente para $ 40,33. Pede-se:

a. Qual o rendimento corrente de dividendos? Resp: $ 185
b. Qual o ganho de capital? Resp: $ 333
c. Se o preço da ação cair para $ 34,78, responda os itens anteriores. Resp: $ 185 e -$ 222
d. Quais retornos monetários totais nos dois casos? Resp: $ 518 e -$ 37.

Exercícios

4. Suponha que você tivesse comprado ações a $ 25. Ao final do ano, o preço é $ 35. Ao longo do ano, você recebeu um dividendo por ação de $ 2. Qual é a taxa de dividendo? Qual é a taxa de ganho de capital? Qual é o retorno percentual? Se você tivesse aplicado um total de $ 1.000, quanto teria no fianl do ano? Resp: 8%; 40%; 48%; 480.

5. Em 2 de janeiro você comprou ações de uma determinada companhia a R$ 33,00 cada uma e, um ano depois, vendeu-as por R$ 38,00 cada uma. Durante o ano, você recebeu um dividendo em dinheiro de R$ 1,50 por ação. Calcule:

a. o ganho de capital por ação. Resp: R$ 5,00/ação
b. o retorno total por ação em R$. Resp: R$ 6,50
c. A taxa de retorno obtida no seu investimento.? Resp: 19,7%

6. No início do ano passado você investiu R$ 48.000,00 em 4.000 ações da Cia. Céu Azul Transportes Aéreos S.A.. Durante o ano, a companhia pagou dividendos de R$ 1,20 por ação. No final do ano, você vendeu as 4.000 ações a R$ 14,61.

a. Calcule o retorno total em R$ obtido em seu investimento. Resp: R$ 15.240,00
b. Identifique o quanto do retorno total deve-se ao ganho de capital e o quanto se deve ao rendimento obtido. Resp: R$ 10.440,00 são ganhos de capital e R$ 4.800,00 são os dividendos recebidos

Preferências em relação ao risco

As atitudes em relação a risco diferem entre os administradores (e as empresas). Por isso, é importante delimitar um nível geralmente aceitável de risco.

- Para o administrador **indiferente ao risco**, o retorno exigido não varia quando o nível de risco vai de x_1 para x_2. Essencialmente, não haveria nenhuma variação de retorno exigida em razão do aumento de risco. É claro que essa atitude não faz sentido em quase nenhuma situação empresarial.
- Para o administrador **avesso ao risco**, o retorno exigido aumenta quando o risco se eleva. Como esse administrador tem medo do risco, exige um retorno esperado mais alto para compensar o risco mais elevado.
- Para o administrador **propenso ao risco**, o retorno exigido cai se o risco aumenta. Teoricamente, como gosta de correr riscos, esse tipo de administrador está disposto a abrir mão de algum retorno para assumir maiores riscos. Entretanto, esse comportamento não tenderia a beneficiar a empresa.

Em sua maioria, os administradores são avessos ao risco. Para certo aumento de risco, exigem aumento de retorno. Geralmente, tendem a serem conservadores, e não agressivos, ao assumir riscos em nome de suas empresas. Portanto, neste livro será feita a suposição de que o administrador financeiro tem aversão a risco e exige retornos maiores para correr riscos mais altos.

Questões Conceituais

1. Quais são os dois componentes do retorno total?

2. Por que os ganhos ou perdas de capital não realizados são incluídos no cálculo de retornos?

3. Qual é a diferença entre retorno monetário e porcentual? Por que os retornos percentuais são mais convenientes?

4. O que é *risco*, no contexto da tomada de decisões financeiras?

5. Defina *retorno* e descreva como calcular a taxa de retorno de um investimento.

6. Compare as seguintes atitudes em relação ao risco: (a) aversão, (b) indiferença, e (c) propensão. Qual delas é mais comum entre os administradores financeiros?

Respostas na Apostila p. 08

Retrospectiva Histórica do Mercado de Capitais

Faremos agoras uma análise estatística numa série histórica de dados de retornos e suas taxas de retorno dos principais ativos do mercado financeiro.

Esta análise é importante pois com ela poderemos traçar as expectativas futuras.

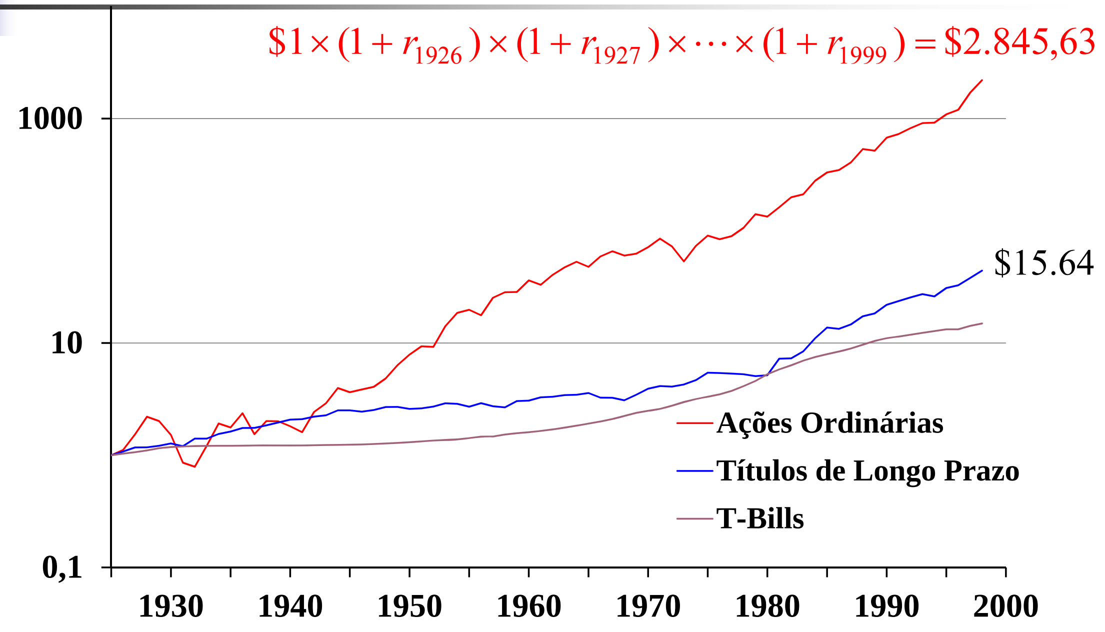
É claro que o passado não determina o futuro, mas indica alguma chance ou probabilidade de ocorrência. Caso contrário não tem jeito de se fazer prognósticos.

Nesta primeira análise temos à disposição os dados coletados nos diversos anos e vamos fazer uma análise desses dados. Como a análise será estatística, obviamente, usaremos a Estatística Descritiva.

Numa segunda etapa, que para nós é a mais importante, usaremos probabilidades para estimarmos os resultados possíveis. Lembrando que nestas projeções existirão sempre margens de erros que também deverão ser determinadas.

Voltemos, portanto, nossa atenção para o passado.

Se você tivesse investido $1 em 1926, você teria quanto em 2.000?



Fonte © ***Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook™***, **Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado porRoger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield).**

Análise Qualitativa

O gráfico mostra diferenças significativas entre as taxas anuais médias de retorno dos vários tipos de ações, obrigações (títulos de longo prazo) e letras (*T-Bills*). Mais adiante, neste capítulo, veremos como as diferenças de retorno podem ser relacionadas a diferenças quanto ao risco de cada um desses investimentos.

Ações Ordinárias: A carteira de ações ordinárias é composta por ações das 500 maiores empresas dos U.S.A. que formam o *Standard & Poor´s Composite Index* (em termos de valor de mercado total das ações).

Ações de empresas Pequenas: Essa carteira é composta por ações de empresas menores, ou seja, pelos 20% das empresas de menor porte negociadas na Bolsa de Valores de New York (NYSE), novamente medidas pelo valor de mercado do total de ações.

Obrigações a longo prazo: emitidas por empresas. É uma carteira formada por obrigações de baixo risco, com prazo de vencimento de 20 anos.

Obrigações a longo prazo emitidas pelo governo dos Estados Unidos. É uma carteira formada por obrigações do governo dos Estados Unidos, com prazo de vencimento de 20 anos.

Letras do tesouro americano (*T-Bills*). É uma carteira formada por letras do tesouro americano, com prazo de vencimento de três meses e emitidas semanalmente.

Esses retornos não foram ajustados por *inflação* ou *impostos*; portanto, são retornos brutos e nominais.

Comentários

Leia atentamente o comentário que se encontra na página 8 da apostila.

Maneiras de se analisar o risco de um ativo

O risco de um ativo pode ser analisado de duas maneiras:

(1) como risco de um único ativo, em que o ativo é considerado isoladamente, e

(2) em uma base de carteira, em que o ativo é um entre muitos outros no portfólio.

A primeira maneira de analisar o risco de um ativo, considerando-o isoladamente, é chamada de **risco isolado**.

Obviamente, a maioria dos ativos é mantida em carteiras, mas é necessário compreender o *risco isolado* a fim de compreeender o risco em um contexto de carteira

Retornos Médios dos Diferentes Investimentos

Conforme vimos o comportamento histórico dos retornos, podemos construir a tabela abaixo:

Aplicação	Retorno % médio
Ações Ordinárias	13,0%
Ações de empresas pequenas	17,7
Obrigações de empresas a longo prazo	6,1
Obrigações do governo a longo prazo	5,6
Letras do Tesouro dos Estados Unidos	3,8
Inflação	3,2

Como foram calculados estes retornos médios?

Revisão de Estatística Descritiva -Conceito de Média

- Dado um conjunto de dados coletados, a **média** é definida como uma medida de tendência central e é a mais comumente usada.
- Seu valor é calculado como a soma de todos os pontos dados dividida pelo número de pontos dados incluídos.

Estatísticas Descritivas do Retorno Total ou Médio

A história dos retornos do mercado de capitais pode ser resumida descrevendo o retorno médio

$$\overline{R} = \frac{(R_1 + \cdots + R_T\ )}{n}$$

A Média na HP-12C

- Na HP12C, os dados estatísticos são *armazenados* como um conjunto de <u>somatórios</u> resultantes dos dados coletados originalmente.
- O conjunto dos dados coletados originalmente *deve ser digitado antes* de se usar quaisquer características estatísticas disponíveis na HP12C, porque todos os valores produzidos por estas ferramentas estatísticas dependem deles.
- A organização da memória da HP12C permite o estudo dos dados estatísticos organizados como amostras de uma ou duas variáveis

O que a HP-12C calcula?

- Como um procedimento geral, os dados são sempre coletados como um par de números, ou valores (x,y), por exemplo, *quantidade* e *preço* de várias mercadorias.
- HP-12C calcula as seguintes somas:

- $\Sigma\, x_n \qquad \Sigma\, y_n \qquad \Sigma(x_n)^2$
- $\Sigma(y_n)^2 \qquad \Sigma(x_n \times y_n)$

Introduzindo os dados

- Para o caso de um par de dados:
- `digita-se o dado` *y* **ENTER** `, o dado` *x* `e, depois, pressione a tecla` **Σ+**
- A HP-12C calcula automaticamente as estatísticas e armazena nos registradores R1 a R6, como mostra a Tabela:

Registrador	Estatística
R1 e visor	N
R2	Σx
R3	Σx^2
R4	Σy
R5	Σy^2
R6	Σxy

Exemplo de Retorno Histórico Médio

- Os 10 últimos preços de venda da ação XYZ foram: $19,80; $18,50; $20,52; $22,53; $20,67; $20,18; $20,00; $18,90; $19,21; $20,04. Qual foi a média destes preços de venda e qual é o desvio padrão desta amostra? Um preço de venda de $24,00 será considerado não usual no mercado desta ação?
- `certifique-se de apagar as memórias somatório antes de iniciar o problema. Para isto,` **f Σ**`, antes de tudo`
- **19,80 Σ+ 18,50 Σ+**
- **20,52 Σ+ 22,53 Σ+**
- **20,67 Σ+ 20,18 Σ+**
- **20,00 Σ+ 18,90 Σ+**
- **19,21 Σ+ 20,04 Σ+**
- Para calcular a média aperte:
- **g** $\bar{x}$ 20,04

A cada valor digitado, seguido de um Σ+, o visor mostra o N, número de dados entrados.

Retorno Histórico Acumulado

É o retorno que um investidor obteria se permanecesse com as ações por n períodos de tempo. Se medirmos o tempo em anos e chamando de **R_i** a taxa de retorno obtida no ano i, a taxa de retorno acumulada, **R_{acum}** , no final de **n** períodos de tempo é dada pela expressão:

$$R_{acumulado} = \{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \ldots (1 + R_n) - 1\}x100$$

EXEMPLO:

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxa anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos.

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

Qual a taxa de retorno acumulada?

$$R_{acumulado} = \{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \ldots (1 + R_n) - 1\}x100$$

$R_{acumulado} =$
$\{(1 + 0{,}10)x(1 + 0{,}06)x(1 - 0{,}03)x(1 + 0{,}025) - 1\}x100 =$
$15{,}92\%$

Na HP-12C No Excel use a VFPLANO.

Retorno Médio Geométrico

Uma medida muito utilizada em análise de retornos acumulados é a MÉDIA GEOMÉTRICA, sobretudo em problemas que envolvam valores que crescem exponencialmente, como é o caso do retorno de carteiras de investimentos:

$$\overline{R_{geom}} = \sqrt[n]{\{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \ldots (1 + R_n)\}} - 1$$

EXEMPLO:

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxa anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos.

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

Qual a taxa média geométrica de retorno?

$$\overline{R_{geom}} = \sqrt[n]{\{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \ldots (1 + R_n)\}} - 1 =$$

$$= \sqrt[4]{\{(1 + 0{,}10)x(1 + 0{,}06)x(1 - 0{,}03)x \ldots (1 + 0{,}025)\}} - 1 =$$

0,0376 = 3,76%

Na HP-12C? No Excel?.

Medidas de Tendência Central vs Medidas de Espalhamento ou Dispersão

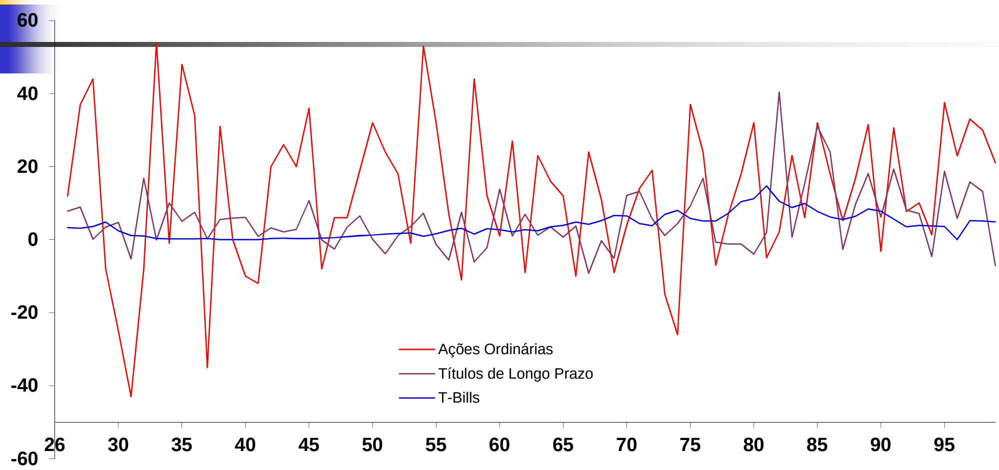
O que estudamos até agora foi uma das medidas de tendência central, a média. As outras medidas: *mediana* e a *moda* não foram tratadas, pois, não contribuem em grande parte ao estudo ou análise dos retornos totais ou porcentuais.

O que iremos abordar a seguir são as medidas de espalhamento ou dispersão dos retornos em torno da média, quais sejam: desvio padrão, variância e coeficiente de variação das taxas de retorno.

Estas medidas são de extrema importância porque estão intimamente relacionadas ao risco. Aliás, são elas que medem o risco do(s) ativo(s) financeiro(s).

Vamos agora olhar o gráfico dos retornos porcentuais históricos de 3 ativos: Ações Ordinárias, Títulos de Longo Prazo e *T-Bills*.

Taxas de Retorno 1926-1999



Fonte: © *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado porRoger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

Olhando o gráfico dos retornos históricos dos diversos ativos, vemos que os *T-bills* não apresentaram grande parte da variabilidade que observamos, por exemplo, no mercado de ações. Isto porque o governo toma dinheiro emprestado, emitindo títulos da dívida. Os *T-bills* possuem menor prazo de vencimento entre todas as dívidas do governo. Como o governo sempre pode cobrar impostos para pagar as suas contas, sua dívida é virtualmente livre de risco de inadimplência a curto prazo. Por isso, a taxa de retorno de tais dívidas é chamadas *taxa de retorno livre de risco* e é utilizadas como padrão de referência.

Prêmio por risco

Chama-se **prêmio por risco** o retorno excedente exigido, de uma aplicação em um *ativo com risco*, acima do exigido numa aplicação *livre de risco*. Assim

$$\text{Prêmio por risco} = R_i - R_{free}$$

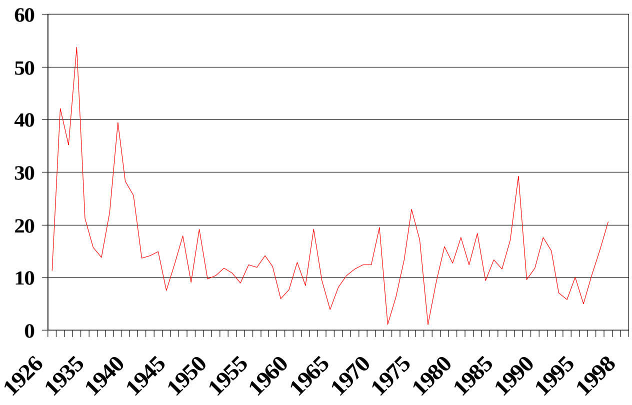
Aplicação	Retorno % médio	Prêmio por risco
Ações Ordinárias	13,0%	9,2%
Ações de empresas pequenas	17,7	13,9
Obrigações de empresas a longo prazo	6,1	2,3
Obrigações do governo a longo prazo	5,6	1,6
Letras do Tesouro dos Estados Unidos	3,8	0
Inflação	3,2	

Aqui vemos que o prêmio médio por risco produzido por um ação ordinária é 13,0% - 3,8% = 9,2%

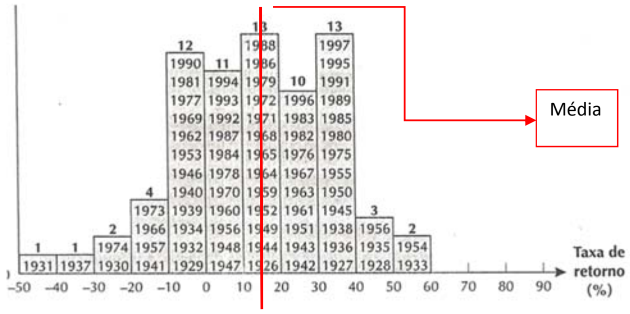
Tiramos daqui a nossa primeira lição dos dados históricos: *ativos com risco, em média, geram prêmios por risco*. Em outras palavras, existe uma **recompensa** por assumir riscos

O que determina a magnitude do prêmio?

A pergunta é: *o que determina a magnitude relativa de prêmios por riscos de diferentes ativos?* A resposta constitui a base da moderna teoria de finanças e dedicaremos uma boa parte do nosso estudo a ela, posteriormente. Por ora, vamos encontrar partes da resposta examinando as variações históricas dos diferentes investimentos, voltando atenção à medida da variabilidade dos retornos, isto é, porque os retornos anuais de ações ordinárias tendem a ser mais voláteis que, digamos, os retornos de obrigações do governo.



Distribuição de Frequências dos retornos de ações ordinárias (grandes empresas)



Observe que os retornos mais frequentes (moda) estão nos intervalos entre 10% e 20% e entre 30% e 40% (distribuição *bimodal*). Em ambos os casos, a frequência do retorno da carteira de ações ordinárias foi igual a 13, em 72 anos.

Como medir, quantificar, esta dispersão (ou espalhamento) em torno da média?

Estatística Descritiva do Risco

A métricas para se determinar quão volátil é o retorno podem ser encontrada nas medidas estatística de dispersão (ou espalhamento): variância, desvio-padrão e coeficiente de variação.

Variância dos Retornos totais ou Porcentuais

Existem dois tipos de **variância**: *amostral* e *populacional*.

Define-se estas variâncias para as taxas de retorno da seguinte maneira:

AMOSTRAL

$$VAR \text{ ou } s^2 = \frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots (R_T - \overline{R})^2}{n-1}$$

POPULACIONAL

$$VAR\ ou\ \sigma^2 = \frac{(R_1 - \bar{R})^2 + (R_1 - \bar{R})^2 + \cdots + (R_1 - \bar{R})^2}{n}$$

A variância dos retornos (total ou médio) mede a dispersão (espalhamento) dos dados em torno da média (ponto central). Quanto maior for o intervalo (distância) entre os valores extremos do conjunto de valores, menos representativa é a média

Exemplo de cálculo da Variância

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxa anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos.

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

$$VAR \text{ ou } s^2 = \frac{(10-3{,}88)^2 + (6-3{,}88)^2 + (-3-3{,}88)^2 + (2{,}5-3{,}88)^2}{4-1} = 30{,}39\%$$

Na HP-12C (veremos depois)

No Excel use as funções VAR.

Conceito de Desvio Padrão

- O **desvio padrão** é um índice de variabilidade usado para caracterizar a dispersão entre os dados numa população dada ou uma amostra.
- Ele mede a dispersão ao redor da média.
- A propriedade do desvio padrão é tal que quando os dados subjacentes estão *normalmente distribuídos*, aproximadamente 68% de todos eles caem dentro de **um** desvio padrão em cada lado da média, e aproximadamente 95% de todos os valores caem dentro de **dois** desvios padrões de cada lado da média.
- Isto tem aplicação em muitos campos, particularmente quando se tenta decidir se um valor observado não é usual de ser significativamente diferente da média.

Desvio Padrão do Retornos Totais ou Porcentuais

Como a variância o **desvio padrão** pode ser *amostral* ou *populacional*:

Define-se estes desvios-padrões para as taxas de retorno da seguinte maneira:

AMOSTRAL

$$s = \sqrt{\frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots (R_T - \overline{R})^2}{n-1}}$$

POPULACIONAL

$$\sigma = \sqrt{\frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots (R_T - \overline{R})^2}{n}}$$

A variância dos retornos (total ou médio) mede a dispersão (espalhamento) dos dados em torno da média (ponto central). Quanto maior for o intervalo (distância) entre os valores extremos do conjunto de valores, menos representativa é a média

Desvio Padrão na HP-12C

- Na HP12C, os dados estatísticos são *armazenados* como um conjunto de somatórios resultantes dos dados coletados originalmente.
- O conjunto dos dados coletados originalmente *deve ser digitado antes* de se usar quaisquer características estatísticas disponíveis na HP12C, porque todos os valores produzidos por estas ferramentas estatísticas dependem deles.
- A organização da memória da HP12C permite o estudo dos dados estatísticos organizados como amostras de uma ou duas variáveis

Exemplo de Desvio Padrão na HP-12C

- Os 10 últimos preços de venda da ação XYZ foram: \$19,80; \$18,50; \$20,52; \$22,53; \$20,67; \$20,18; \$20,00; \$18,90; \$19,21; \$20,04. Qual foi a média destes preços de venda e qual é o desvio padrão desta amostra? Um preço de venda de \$24,00 será considerado não usual no mercado desta ação?
- certifique-se de apagar as memórias somatório antes de iniciar o problema. Para isto, **f Σ**, antes de tudo
- **19,80** Σ+ **18,50** Σ+
- **20,52** Σ+ **22,53** Σ+
- **20,67** Σ+ **20,18** Σ+
- **20,00** Σ+ **18,90** Σ+
- **19,21** Σ+ **20,04** Σ+
- Para calcular o desvio padrão aperte:
- **g s** 1,12

A cada valor digitado, seguido de um Σ+, o visor mostra o N, número de dados entrados.

Exemplo - Continuação

Baseado nestes números, aproximadamente 68% dos preços estão no intervalo de $20,04 ± $1,12. Ou seja entre **$18,92** e **$21,16**.

Aproximadamente 95% dos preços estão no intervalo $20,04 ± 2×($1,12). A seqüência de teclas seguinte dá o limite inferior:

g **$\bar{x}$** **ENTER** **g** **s** **2** **x** **x<>y** **R↓** **-**

17,80

Análise passo a passo a pilha operacional.

Análise da Pilha Operacional da HP-12C neste Exercício

	g $\bar{x}$	ENTER	g s	2	x	x<>y	R↓	-
T	0,00	**0,00**		$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	**0,00**	
Z	0,00	94,00	$\bar{x}$	0,00	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
Y	94,00	$\bar{x}$	0,00	**s**	0,00	2s	$\bar{x}$	$\bar{x}$
X	$\bar{x}$	$\bar{x}$	s	2	2s	0,00	2s	Resulta-do

E o limite superior?

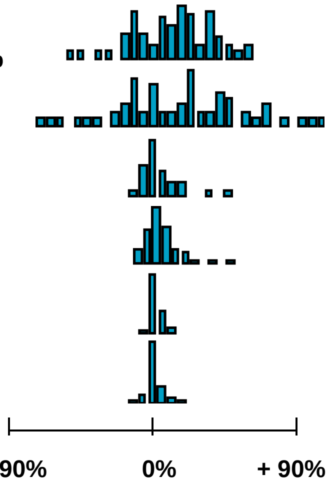
- O visor mostra o limite **inferior**.
- Para calcular o limite **superior**, se nenhuma operação foi realizada após as teclas acima, pressione:
- **x < > y   g   LSTx   +**
- 22,27
- O visor mostra o limite superior.
- Logo, 95% dos preços estarão entre 17,80 e 22,27
- Resposta: $24,00 é um preço não usual para a ação XYZ baseado nos seus últimos 10 preços de venda.

Devio Padrão no Excel

	A	B	C	D	E
1	Ano	Taxa de Retorno			
2	1	10%			
3	2	6%			
4	3	-3%			
5	4	2,5%			
6					
7	Variança	30,40%	=VAR.A(B2:B5)*100		
8	Desvio Padrão	5,513%	=DESVPAD.A(B2:B5)		
9					

Retornos Históricos 1926-1999

Séries	Retorno Anual Médio	Desvio Padrão	Distribuição
Ações de Grandes Empresas	13.0%	20.3%	
Ações de Pequenas Empresas	17.7	33.9	
Títulos Empresariais de Longo Prazo	6.1	8.7	
Títulos do Governo de Longo Prazo	5.6	9.2	
U.S. Treasury Bills	3.8	3.2	
Inflação	3.2	4.5	



Fonte: © *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado porRoger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

Usando uma calculadora HP-12C (ou o Excel), podemos obter os retornos históricos de 1926-1999.

Retornos Históricos 1926-1999

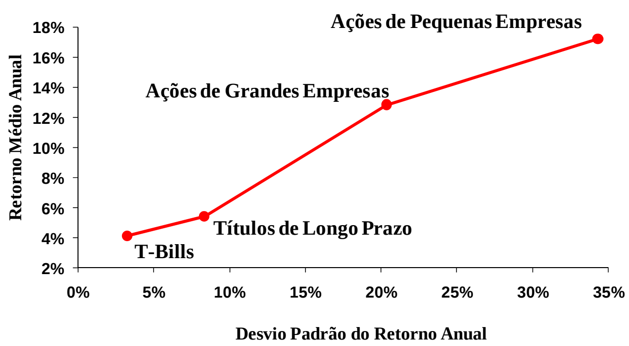
- A média do **excesso** de retorno das ações ordinárias das pequenas empresas no período de 1926 até 1999 foi de 13,9% = 17,7% – 3,8%
- A média do excesso de retorno dos títulos de longo prazo das empresas para o período de 1926 até 1999 foi de 2,3% = 6,1% – 3,8%
- A média do excesso de retorno das ações ordinárias das grandes empresas para o período de 1926 até 1999 foi 9,2% = 13,0% – 3,8%

Retornos Históricos 1926-1999

A figura anterior resume várias das discussões mantidas até agora sobre a história do mercado de capitais. Mostra os retornos médios, desvios padrões e distribuições de frequências de retornos anuais em uma escala comum. Observe que nela o *desvio padrão* da carteira de ações de pequenas empresas, por exemplo, é (33,9% a.a.) quase 10 vezes maior que o desvio-padrão das T-bills (3,2% a.a.).

Segunda Lição dos Retornos Históricos

Uma segunda lição extraída da análise destes retornos históricos de diversos ativos financeiros é que *quanto maior a recompensa em potencial, maior é o risco em potencial*.



Podemos observar que:
- Taxa de retorno sobre *T-bills* é essencialmente livre de risco.
- Investir em ações é arriscado.
- Para os investidores tolerarem este risco, eles precisam ser compensados – eles exigem um prêmio de risco.
- A diferença entre o retorno sobre os *T-bills* e ações é o prêmio de risco por se investir em ações.

Retorno Médio de Ações e Retornos Livres de Risco

- O *Prêmio de Risco* é o retorno adicional (além da taxa livre de risco) resultante da tolerância ao risco.
- Uma das observações mais significativas dos dados do mercado de ações é este excesso a longo prazo no retorno da ação em relação do retorno livre de risco.
  - Ver o próximo slide

Prêmio de Risco

- Suponha que o *The Wall Street Journal* anunciou que a taxa atual para os Treasury bills no ano é de 5%.
- Qual é o retorno esperado sobre o mercado das ações de pequenas empresas?
- Lembre-se que a média do excesso de retorno das ações ordinárias das pequenas empresas para o período de 1926 até 1999 foi de 13,9%
- Dada uma taxa livre de risco de 5%, temos um retorno esperado sobre o mercado das ações de pequenas empresas de 18,9% = 13,9% + 5%

Estatística do Risco

- Não existe uma definição universalmente aceita para o risco.
- As medidas do risco que discutimos são a variância e o desvio padrão.
  - O desvio padrão é a medida estatística padrão do espalhamento de uma amostra, e ela será a medida que usaremos na maioria das vezes.
- QUESTÃO: O retorno esperado das ações deveria ser uma função da variância ou do desvio padrão das ações?

Coeficiente de Variação (CV)

O coeficiente de variação é uma medida estatística que indica a dispersão relativa, isto é, o **risco unitário** de um ativo. É calculada pela seguinte expressão:

$CV = \frac{\sigma}{\mu}$ ....para a população

$CV = \frac{s}{\bar{x}}$. ....para a amostra

Por ser uma medida relativa e não absoluta, como o desvio padrão, o CV é um indicador mais exato na comparação de riscos de ativos com diferentes retornos esperados. Ele indica a dispersão relativa, ou seja, o risco por unidade de retorno esperada.

Quanto maior o coeficiente de variação, maior será o risco do ativo.

Exemplo

Os retornos mensais dos investimentos em ações A e B durante os últimos 6 meses estão apresentados na tabela seguinte:

A	B
5%	6%
9%	7%
15%	9%
12%	7%
9%	6%
6%	8%

a. Calcule os retornos médios de A e B.
b. Calcule os desvios padrões de A e B.
c. Qual dos dois apresenta maior dispersão?

Certifique-se em apagar os registros estatísticos antes de iniciar os cálculos. Para isso, pressione **f** Σ antes de tudo.
Daí comece a digitação:
5 Σ**+** ....o visor mostrará 1 (o primeiro dado)
9 Σ**+** e assim até o último dado.
Para se calcular a média dos retornos da Ação A pressionamos **g ,** o visor mostrará 9,33, a seguir, para o cálculo do desvio padrão da Ação A, aperte **g s** aparecerá 3,72, no visor, representando a sua volatilidade.

	A	B
$x_{\text{médio}}$	9,33%	7,17%
s	3,72%	1,17%
CV	39,9%	16,9%

O coeficiente de variação CV mede a variabilidade (em Finanças = RISCO do investimento). Neste exemplo temos que o CV (risco) da Ação A é MAIOR que o da ação B.

Exercícios

Suponha que a Capivara Co. e a Berts Co., tenham apresentado os seguintes retornos nos últimos quatro anos:

Ano	Capivara Co.	Berts Co.
2006	12%	12%
2007	15%	16%
2008	12%	15%
2009	11%	9%

Quais os retornos médios? Resp: $Capivara_{Médio}$ = 17,50 e $Berts_{médio}$ =5,5%.
Quais os desvios padrões dos retornos?$S_{Capivara}$ = 0,2987 e S_{Berts} = 0,1327.
Quais as variâncias dos retornos? $S^2_{capivara}$ = 0,0892 e S^2_{Berts} = 0,0176
Qual empresa apresenta maior risco? A Berts é um investimento mais volátil

Riscos e Retornos Esperados

Contemplando o Futuro

Até agora estivemos focados no **passado** e com ele aprendemos algumas lições sobre a história dos mercados de capitais:

1ª lição – Existe uma recompensa, na média, por assumir risco, chamada de prêmio por risco.

2ª lição – O prêmio por risco é maior nos investimentos mais arriscados..

Comecemos agora a discutir como analisar retornos e variâncias quando as informações disponíveis dizem respeito a **possíveis** retornos **futuros** e suas possibilidades de ocorrência.

Ninguém está dizendo que o passado determina o futuro. Este é totalmente imprevisível, mas temos esperança que algumas coisas apreendidas com o passado possam ajudar a prever o futuro.

A estatística agora é INFERENCIAL.

Média Ponderada um novo conceito

- Numa **média simples**, os valores individuais são adicionados e divididos pelo número de valores envolvidos. Com efeito, *cada* peso do valor ou contribuição à média é 1/n, onde n é o número de valores na amostra.
- Comparativamente, uma **média ponderada** é uma média calculada dando *diferentes* pesos a alguns dos valores individuais.

Exemplos:

- uma média simples dos três números 5, 10 e 15 aplica-se um peso igual a (1/3) para cada valor e a uma média simples dos três números 5, 10 e 15 aplica-se um peso igual a (1/3) para cada valor e a média resultante é 10.
- Uma média ponderada ou média poderá aplicar um peso de 50% a 5 e 25% para cada um dos 10 e 15, resultando numa média ponderada de 8,75.
- Existem muitas situações onde um cálculo de média ponderada economiza uma grande porção de tempo do que usar uma abordagem de média simples.

Média Ponderada - Fórmula

Dado um conjunto de dados coletados onde valores repetidos v_n ocorrem k_n vezes (peso), a média ponderada é calculada como:

$$\overline{x}_w = \frac{\sum (k_n \cdot v_n)}{\sum k_n}$$

Na HP-12C a média ponderada é calculada com o uso das teclas **g** $\overline{x}_w$ e os conteúdos de dois somatórios são usados.

$$\overline{x}_w = \frac{\sum w\, x}{\sum w}$$

Note que a tecla R↓ é pressionada porque o valor que aparece no visor após **g** ser pressionados é a média dos pesos e não será de nenhuma utilidade neste exemplo.

Média Ponderada - Exemplo

Um grande *shopping center* quer saber a média ponderada dos preços de venda de 2.000 unidades de um produto que tem o seu preço final ajustado de acordo com os primeiros dez dias de vendas. Calcule o preço médio e a média ponderada dos preços de vendas deste produto.

Preço por unidade	# de unidades vendidas	Preço por unidade	# de unidades vendidas
R$ 24,20	354	R$ 24,14	288
R$ 24,10	258	R$ 24,06	240
R$ 24,00	209	R$23,95	186
R$ 23,90	133	R$ 23,84	121
R$ 23,82	110	R$ 23,75	101

Para calcular a média ponderada dos preços de venda: **g** $\overline{x}_w$ 24,03

Para calcular o preço médio:

g $\overline{x}$ **R↓** 23,98

Certifique-se em apagar as memórias estatísticas/somatório antes de iniciar o problema.

f **Σ**

Médias regulares e médias ponderadas podem ser calculadas dos mesmos dados acumulados na HP12C, desde que a ordem dos valores seja entrada correta-mente: *valor* **ENTER** *peso*.

24.20 ENTER 354 Σ+ 24.14 ENTER 288 Σ+ 24.10 ENTER 258 Σ+ 24.06 ENTER 240 Σ+ 24.00 ENTER 209 Σ+ 23.95 ENTER 186 Σ+ 23.90 ENTER 133 Σ+ 23.84 ENTER 121 Σ+ 23.82 ENTER 110 Σ+ 23.75 ENTER 101 Σ+

Retorno Esperado

É a **expectativa futura de retorno** de um ativo com risco. Este será a primeira medida importante para o estudo do risco e representa a média dos vários resultados (*outcomes*) esperados ponderados pela probabilidade atribuída a cada um desses valores. Assim

$$E(R) = \sum_{k=1}^{n} (P_k \; x \; R_k)$$

Onde E(R) = retorno esperado
P_k = probabilidade de ocorrência de cada evento
R_k = valor de cada resultado considerado

Exemplo

Admita que você esteja avaliando dois investimentos: A e B. Baseando-se em sua experiência de mercado e em projeções econômicas, você desenvolve a seguinte distribuição de probabilidades dos resultados monetários previstos:

Investimento A		Investimento B	
Resultados esperados	Probabilidades	Resultados esperados	Probabilidades
$ 650	25%	$ 500	30%
$ 700	50%	$ 700	40%
$ 750	25%	$ 900	30%

Na HP-12C, faríamos:
f Σ 650 ENTER 0,25 Σ+ 700 ENTER 0,50 Σ+ 750 ENTER 0,25 Σ+ g $\bar{x}_w$
f Σ 500 ENTER 0,30 Σ+ 700 ENTER 0,40 Σ+ 900 ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$
No exemplo anterior você estabeleceu a distribuição de probabilidades dos resultados monetários baseando-se na sua experiência.

Substituindo-se estes dados na expressão do E(R)acima, ficamos:
$E(R_A) = (0{,}25 \times \$\ 650) + (0{,}50 \times \$\ 700) + (0{,}25 \times \$\ 750) = \$\ 700$
$E(R_A) = (0{,}30 \times \$\ 500) + (0{,}40 \times \$\ 700) + (0{,}30 \times \$\ 900) = \$\ 700$
As duas alternativas investimentos apresentam o mesmo valor esperado de $ 700, podendo-se considerar, em termos de retorno prometido, como indiferente a implementação de uma ou de outra.

O Exemplo no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Investimento A		Investimento B							
2	Resultados Esperados	Probabilidades	Resultados Esperados	Probabilidades						
3	R$ 650,00	25%	R$ 500,00	30%						
4	R$ 700,00	50%	R$ 700,00	40%						
5	R$ 750,00	25%	R$ 900,00	30%						
6										
7			maneira 1		maneira 2					
8	Retorno Esperado $E(R_A)$	R$ 700,00	=A3*B3+A4*B4+A5*B5		=SOMARPRODUTO($A$3:$A$5;$B$3:$B$5)					
9	Retorno Esperado $E(R_B)$	R$ 700,00	=C3*D3+C4*D4+C5*D5		=SOMARPRODUTO($C$3:$C$5;$D$3:$D$5)					
10										
11										

As células com os dados foram formatadas para moeda e porcentagem

Exercício de Fixação

Com base nas informações a seguir, calcule o retorno esperado:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	**Retorno do título de acordo com o Estado**
Crescimento	0,30	26%
Recessão	0,70	8%

Exemplo 2

Considere um único período, digamos, um ano. Temos duas ações, a LMTC10 com expectativa de retorno de 70% se a economia se aquecer e -20% se houver recessão. A UDNZ15 com expectativa de retorno de 10% se a economia se aquecer e 30% se houver recessão, no mesmo período. Suponha ainda que você acredita que haverá um crescimento na economia em apenas 20% das ocasiões. Quais os retornos esperados das ações LMTC10 e UDNZ15?

Em primeiro lugar, consideremos apenas dois estados da natureza (crescimento e recessão). Haverá crescimento em 20% das ocasiões e recessão em 80% das ocasiões. Assim

Estados da Economia	Probabilidades dos Estados	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado da Economia	
		Resultados Esperados da Ação LMTC10	Resultados Esperados da Ação UDNZ15
Crescimento	0,20	70%	30%
Recessão	0,80	-20%	10%

		maneira 1	maneira 2
Retorno Esperado $E(R_A)$	-2%	=A3*B3+A4*B4+A5*B5	=SOMARPRODUTO($A$3:$A$5;$B$3:$B$5)
Retorno Esperado $E(R_B)$	14%	=C3*D3+C4*D4+C5*D5	=SOMARPRODUTO($C$3:$C$5;$D$3:$D$5)

Substituindo-se estes dados na expressão do E(R)acima, ficamos:

$E(R_{LMTC10}) = (0{,}20 \times 70\%) + (0{,}80 \times (-20\%)) = -2\%$

$E(R_{UDZN15}) = (0{,}20 \times 30\%) + (0{,}80 \times 10\%) = 14\%$

Na HP-12C: **f Σ 70 ENTER 0,20 Σ+ 20 CHS ENTER 0,80 Σ+ g** $\bar{x}_w$ **.... -2.00**

f Σ 30 ENTER 0,30 Σ+ 10 ENTER 0,80 Σ+ g $\bar{x}_w$ **.... 14**

Exercício de Fixação

Com base nas informações a seguir, calcule o retorno esperado:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	**Retorno do título de acordo com o Estado**
Recessão	0,10	-0,09
Normal	0,70	0,11
Crescimento	0,20	0,28

Resposta: E(R) = 12%

Faça na HP-12C e em casa no Excel

Com base nas informações a seguir, calcule o retorno esperado:

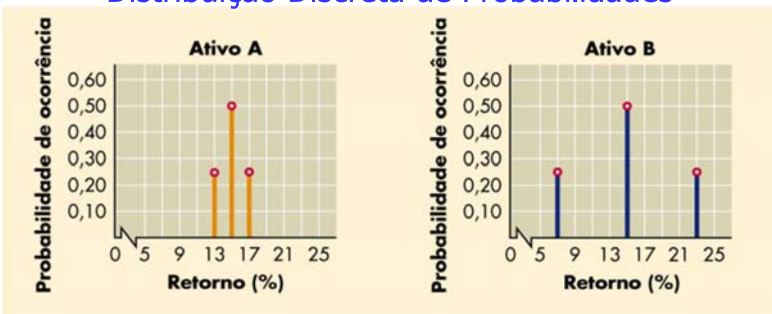
Estado da economia	**Probabilidades**	**Taxa de retorno projetada para as ações**	
		Cia A	Cia B
Recessão	5%	-2,3%	-1,5%
Estagnação	10%	1,5%	2,4%
Crescimento Moderado	25%	4,5%	5,6%
Crescimento Elevado	60%	6,8%	7,5%

Resp: E(RA) = 5,24% e E(RB) = 6,07%

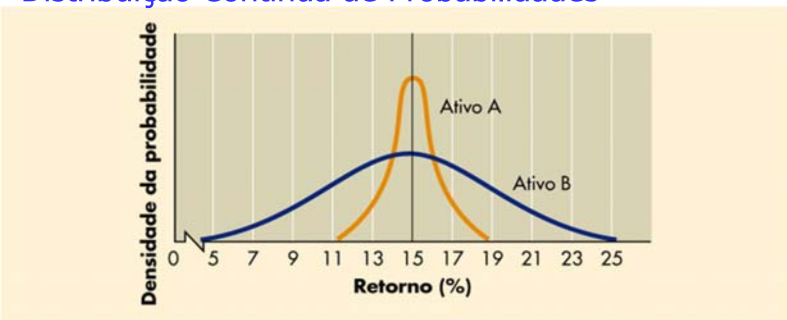
Ilustração dos Retornos Esperados

Uma forma bem ilustrativa de representar os vários retornos esperados (para vários estados da natureza) é efetuadda por meio de um gráfico que envolva as distribuições de probabilidades das alternativas, como mostrado nas figuras:

Distribuição Discreta de Probabilidades



Distribuição Contínua de Probabilidades



A medida que o valor esperado NÃO demonstra o risco associado a cada proposta de investimento, o que faz que seja necessário conhecer o grau de dispersão dos resultados em relação à média. Essa quantificação, que denota o risco do investimento, pode ser efetuada mediante os cálculos do *desvio padrão* e *variância.*

Desvio Padrão e Variância

Essas medidas de dispersão indicam como os valores de um conjunto se dispersam em relação a seu ponto central, a média. Quanto maior se apresenta o intervalo entre os valores extremos de um conjunto, menor é a representatividade estatística da média, pois os valores em observação encontram-se mais distantes dessa medida central.

Tanto o desvio-padrão como a variância têm por objetivo medir estatisticamente a variabilidade (grau de dispersão) dos possíveis resultados em termos de valor esperado. Representam como visto, em outras palavras, medidas de risco, e são determinados pelas seguintes expressões de cálculo

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} P_k \; x \; (R_k - \bar{R})^2}$$

As calculadoras não têm nenhuma função embutida para encontrar o desvio padrão e a variância quando se trata de dados probabilísticos; nesse caso você precisa executar o processo através de tabelas, manualmente.

Exemplo 1

As distribuições de probabilidades das taxas de retorno para duas empresas a Capivara Co. e a Berts Co.estão mostradas abaixo:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Retorno dos títulos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Capivara Co.	Resultados esperados da Berts Co.
Expansão	0,30	100%	20%
Normal	0,40	15%	15%
Recessão	0,30	(70%)	10%

Encontre:

a. O retorno médio de cada empresa
b. O desvio padrão de cada empresa
c. A variância de cada empresa

Na HP-12C, faríamos:

f Σ 100 ENTER 0,30 Σ+ 15 ENTER 0,40 Σ+ 70 CHS ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$ 15%
f Σ 20 ENTER 0,30 Σ+ 15 ENTER 0,40 Σ+ 10 ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$ 15%

A variância é encontrada como $\sigma^2 = 0{,}3\ x\ (100 - 15)^2 + 0{,}4\ x\ (15 - 15)^2 + 0{,}3\ x\ (-70 - 15)^2$
$= 0{,}3\ x\ 7.225 + 0{,}4\ x\ 0 + 0{,}3\ x\ 7.225 = 2.167{,}5 + 0{,}0 + 2.167{,}5 = 4.335{,}0$

$\sigma^2 = 0{,}3\ x\ (20 - 15)^2 + 0{,}4\ x\ (15 - 15)^2 + 0{,}3\ x\ (10 - 15)^2 = 0{,}3\ x\ 25 + 0{,}4\ x\ 0 + 0{,}3\ x\ 25$
$= 7{,}5 + 0{,}0 + 7{,}5 = 15{,}0$

Os desvios padrões são encontrados como: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.335} = 65{,}84\%$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15} = 3{,}873\%$

Exemplo 1 no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado da Economia		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático			
2			Resultados Esperados da Capivara Co.	Resultados Esperados da Berts Co.	Capivara Co. $(R_k - R_{med})$	Berts Co. $(R_k - R_{med})$	Capivara Co. $(R_k - R_{med})^2$	Berts Co. $(R_k - R_{med})^2$	Capivara Co. $p_k x (R_k - R_{med})^2$	Berts Co. $p_k x (R_k - R_{med})^2$		
3	Expansão	0,30	100%	20%	0,85	0,05	0,7225	0,0025	0,21675	0,00075		
4	Normal	0,40	15%	15%	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,00000	0,00000		
5	Recessão	0,30	-70%	10%	-0,85	-0,05	0,7225	0,0025	0,21675	0,00075		
6								Variância	43,35%	0,15%		
7			maneira 1					Desvio Padrão	65,84%	3,87%	=RAIZ(VAR	
8	Retorno Esperado $E(R_A)$	15%	=B3*C3+B4*C4+B5*C5					Usando as funções do Excel				
9	Retorno Esperado $E(R_B)$	15%	=B3*D3+B4*D4+B5*D5					Variância				
10								Desvio Padrão				
11												

Exercício 1

Com base nas informações a seguir, calcule os **riscos** das companhias A e B.

Estado da economia	Probabilidades	Taxa de retorno projetada para as ações	
		Cia A	Cia B
Recessão	5%	-2,3%	-1,5%
Estagnação	10%	1,5%	2,4%
Crescimento Moderado	25%	4,5%	5,6%
Crescimento Elevado	60%	6,8%	7,5%

Resp: σ_A = 2,09% e σ_B = 2,06%

Exercício 1 no Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12											
13	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado da Economia		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático		
14			Resultados Esperados da Cia. A	Resultados Esperados da Cia.B	Cia.A $(R_k - R_{med})$	Cia.B $(R_k - R_{med})$	Cia.A $(R_k - R_{med})^2$	Cia.B $(R_k - R_{med})^2$	Cia.A $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Cia.B $p_k x(R_k - R_{med})^2$	
15	Recessão	5%	-2,3%	-1,5%	-7,54%	-7,57%	0,5685%	0,57229%	0,02843%	0,02861%	
16	Estagnação	10%	1,5%	2,4%	-3,74%	-3,67%	0,1399%	0,13432%	0,01399%	0,01343%	
17	Crescimento Moderado	25%	4,5%	5,6%	-0,74%	-0,46%	0,0055%	0,00216%	0,00137%	0,00054%	
18	Crescimento Elevado	60%	6,8%	7,5%				Variância	0,04378%	0,04259%	
19								Desvio Padrão	2,09242%	2,06367%	
20			maneira 1					Usando as funções do Excel			
21	Retorno Esperado $E(R_A)$	5,24%	=B15*C15+B16*C16+B17*C17+B18*C18					Variância			
22	Retorno Esperado $E(R_B)$	6,07%	=B15*D15+B16*D16+B17*D17+B18*D18					Desvio Padrão			=RAIZ(VAR)
23											
24											

Exercício 2

Para você praticar o cálculo de medidas prospectivas de desempenho de carteiras, considere dois ativos e três estados da economia.

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,10	-0,20	0,30
Normal	0,60	0,10	0,20
Crescimento	0,30	0,70	0,50

Quais são os retornos esperados e desvios-padrões destes dois ativos?

Respostas: $E(R_A) = 25\%$ e $E(R_B) = 30\%$;
$\sigma_A^2 = 0,0945$ e $\sigma_B^2 = 0,0180$; $\sigma_A = 30,74\%$ e $\sigma_B = 13,42\%$.

Exercício 2 no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
25											
26	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático		
27			Resultados Esperados da Ação A	Resultados Esperados da Ação B	Ação A $(R_k - R_{med})$	Ação B $(R_k - R_{med})$	Ação A $(R_k - R_{med})^2$	Ação B $(R_k - R_{med})^2$	Ação A $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Ação B $p_k x(R_k - R_{med})^2$	
28	Recessão	0,10	-0,20	0,30	-0,45	0,00	0,2025	0,0000	0,02025	0,00000	
29	Normal	0,60	0,10	0,20	-0,15	-0,10	0,0225	0,0100	0,01350	0,00600	
30	Crescimento	0,30	0,70	0,50	0,45	0,20	0,2025	0,0400	0,06075	0,01200	
31								Variância	9,45%	1,80%	
32			maneira 1					Desvio Padrão	30,74%	13,42%	=RAIZ(VAR)
33	Retorno Esperado $E(R_A)$	25%	=B28*C28+B29*C29+B30*C30						Usando as funções do Excel		
34	Retorno Esperado $E(R_B)$	30%	=B28*D28+B29*D29+B30*D30					Variância			
35								Desvio Padrão			
36											
37											
38											

Exercício 3

Com base nas seguintes informações, calcule os retornos e desvios-padrões das duas ações.

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,20	0,04	-0,20
Normal	0,60	0,08	0,20
Crescimento	0,20	0,16	0,60

Exercício 4

Suponhamos que um investidor, ao avaliar as ações das companhias Alfa e Beta, estime os seguintes fluxos de caixa futuros com suas respectivas probabilidades de ocorrência, conforme indicados na tabela abaixo

Cia. Alfa		Cia. Beta	
Dividendos esperados	Probabilidades	Dividendos Esperados	Probabilidades
$ 729	0,10	360	0,10
$ 780	0,15	600	0,20
$ 840	0,50	840	0,40
$ 900	0,15	1.080	0,20
$ 960	0,10	1.329	0,10

Avalie os **retornos esperados** e os **riscos** das ações

Resp: $E(R_A)$ = $ 840,90
$E(R_B)$ = $ 840,90
σ_A = $ 61,25
σ_B = $ 264,56

Observe que ambos os investimentos fornecem o mesmo valor esperado, sendo ao investidor indiferente comprar as ações de uma ou outra companhia. Todavia, as ações da companhia Alfa exibem um risco mais baixo (menor desvio-padrão) que as ações da companhia Beta. Se o investidor tiver aversão ao risco, certamente ele comprará as ações da companhia Alfa.

Exercício 4 no Excel

Aula de Risco.xlsx

Probabilidades Cia. Alfa	Probabilidades Cia. Beta	Fluxos de Caixa Futuros		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático		
		Dividendos Esperados da Cia. Alfa	Dividendos Esperados da Cia.Beta	Cia.Alfa $(R_k - R_{med})$	Cia.Beta $(R_k - R_{med})$	Cia.Alfa $(R_k - R_{med})^2$	Cia.Beta $(R_k - R_{med})^2$	Cia.Alfa $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Cia.Beta $p_k x(R_k - R_{med})^2$	
0,10	0,10	R$ 729,00	R$ 360,00	-111,90	-480,90	12521,61	231264,81	1252,16	23126,48	
0,15	0,20	R$ 780,00	R$ 600,00	-60,90	-240,90	3708,81	58032,81	556,32	11606,56	
0,50	0,40	R$ 840,00	R$ 840,00	-0,90	-0,90	0,81	0,81	0,40	0,32	
0,15	0,20	R$ 900,00	R$ 1080,00	59,10	239,10	3492,81	57168,81	523,92	11433,76	
0,10	0,10	R$ 960,00	R$ 1329,00	119,10	488,10	14184,81	238241,61	1418,48	23824,16	
							Variância	R$ 3751,29	R$ 69991,29	
		maneira 1					Desvio Padrão	R$ 61,25	R$ 264,56	=RAIZ(VAR)

Retorno Esperado $E(R_A)$	R$ 840,90	=A42*C42+A43*C43+A44*C44+A45*C45+A46*C46
Retorno Esperado $E(R_B)$	R$ 840,90	=B42*D42+B43*D43+B44*D44+B45*D45+B46*D46

Usando as funções do Excel

Variância		
Desvio Padrão		

Desvio Padrão é importante?

Um importante atributo do desvio padrão como uma medida de espalhamento é que se a média e o desvio padrão de uma distribuição normal são conhecidos, é possível calcular o percentil associado com qualquer resultado dado. Numa distribuição normal, cerca de 68% dos resultados estão dentro de um desvio padrão da média e cerca de 95% dos resultados estão dentro de dois desvios padrões da média.

O desvio padrão tem sido comprovado uma medida extremamente útil do espalhamento em parte porque ele é matematicamente tratável. Muitas fórmulas de estatística inferencial usam o desvio padrão.

Distribuição normal

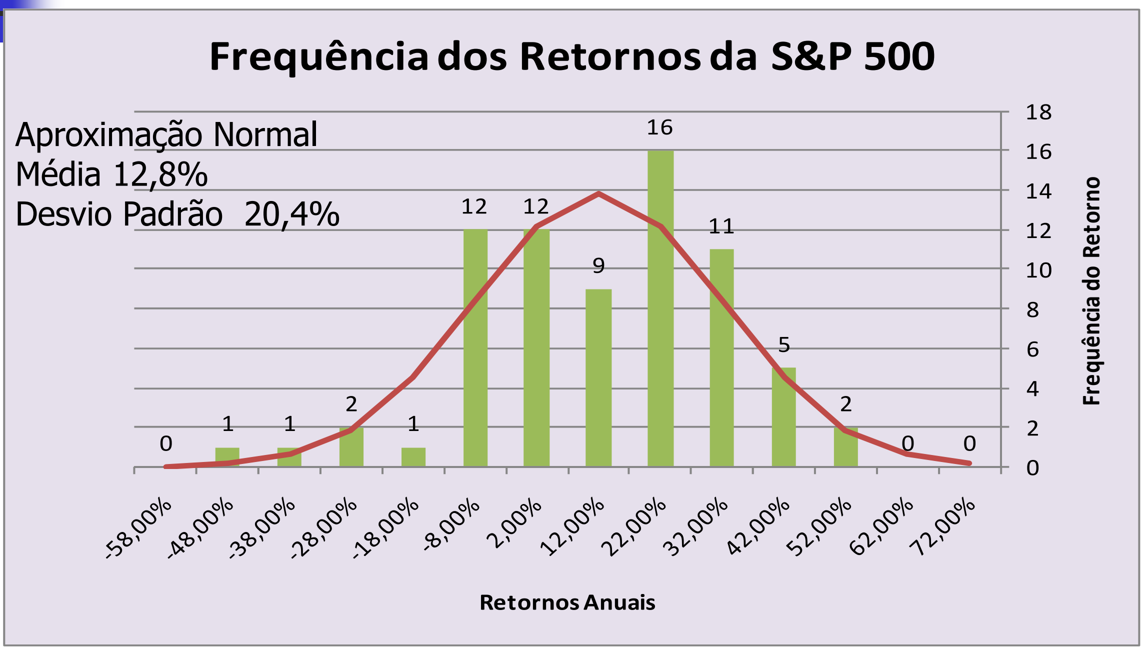
O conceito básico de probabilidade refere-se à possibilidade (ou chance), expressa normalmente em porcentagem, de ocorrer determinado evento. Por exemplo, uma previsão do tempo poderia dizer: "Há 40% de chance de chover hoje e 60% de chance de não chover". Se todos os eventos (ou resultados) possíveis, são relacionados, e se é atribuída uma probabilidade para cada evento, essa listagem é chamada de distribuição de probabilidades. Assim

Resultado (Evento)	Probabilidade
Chover	0,4 = 40%
Não Chover	0,6 = 60%
	1 =100%

As probabilidades também podem ser atribuídas aos resultados (ou retornos) possíveis de um investimento. Por exemplo, ao assumir uma probabilidade de 70% de que ocorra um fluxo de caixa de $ 800 em determinado período de projeto, está-se, na verdade, introduzindo um risco de 30% de que tal não se verifique (1 – 0,70), dada sua chance conhecida de 70%.

Vejamos a freqüência (probabilidades) dos retornos da *S&P 500* (variável aleatória):

Distribuição Normal

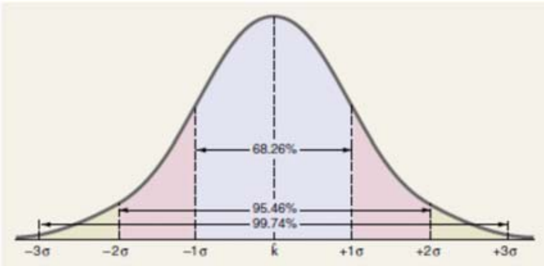


Fonte© *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado porRoger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

Distribuição Normal

Para diversos eventos aleatórios na natureza, determinada distribuição de probabilidades, é usada para descrever a probabilidade de se ter um valor dentro de um intervalo. Por exemplo, a idéia de dar notas em escala numa prova resulta do fato de que as notas de provas se assemelham frequentemente à curva da chamada distribuição normal.

A **distribuição normal** é simétrica em forma de sino, que é definida completamente pela média e pelo desvio-padrão.



A diferença nas duas figuras anteriores é que a primeira figura temos uma distribuição de apenas um número *finito* de observações, enquanto a segunda figura está baseada em um número *infinito* de observações.

A utilidade da distribuição normal consiste no fato de que ela pode ser completamente descrita pela média e pelo desvio-padrão. Se você tiver estes dois dados, não precisará conhecer mais nada. Ela é muito utilizada em Finanças pois os retornos esperados (e outros eventos financeiros) se aproximam muito dessa distribuição.

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4965	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Distribuição Normal

Se você desejar, poderá encontrar os valores da probabilidades usando a equação da curva normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Existem infinitas curvas associadas a cada valor da média e do desvio-padrão. Porém, os matemáticos arrumaram uma maneira de padronizar, isto é, fazer uma transformação de variáveis e cair sempre numa curva normal padronizada.
A variável padronizada é encontrada por:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

O z é a variável padrão que significa o número de desvios-padrões existentes a partir da média.

EXEMPLO

Considere um ativo (uma ação, por exemplo) que tenha retorno esperado de $E(R)$ = μ = 30% e risco (desvio-padrão) σ = 12%. Encontre o valor da **variável padrão** Z para R_1 = 30% e R_2 = 48%.

Solução

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30\% - 30\%}{12\%} = 0$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{48\% - 30\%}{12\%} = 1{,}50$$

Leitura na Tabela

A leitura desta tabela é feita identificando-se na primeira coluna z_0 as duas primeiras casas do valor de Z calculado, a terceira casa deve ser observada na coluna. Por exemplo, para um valor Z = 1,50, o valor da **área** estará na linha 1,5 (as duas primeiras casas de Z) e na coluna 0 (terceira decimal), que corresponderá a 0,4332.

No exemplo acima temos para Z = 0 o valor 0,00, e para Z = 1,50, o valor 0,4332. Isto significa que existem 43,32% de probabilidade da taxa de retorno R esperado do ativo situar-se entre 30% e 48%.

Cabe lembrar que a Tabela acima é válida também para valores negativos de Z, uma v ez que os seus valores são simétricos em relação à média.

Exemplo

Considere um ativo (uma ação, por exemplo) que tenha retorno esperado de $E(R)$ = μ = 30% e risco (desvio-padrão) σ = 12%. Encontre a **probabilidade** do retorno esperado deste ativo ficar entre 24% e 36%, no período.

Solução

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{24\% - 30\%}{12\%} = -0{,}500$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{36\% - 30\%}{12\%} = 0{,}500$$

O valor tabelado para Z = 0,500 é 0,1915, a direita e à esquerda, ou seja, positivo e negativo. Dessa forma a probabilidade será a soma das áreas do lado positivo e negativo [0,1915 – (-0,1915) =0,3830]. Assim, a probabilidade do retorno esperado do ativo ficar entre 24% e 36% , no período, é de **38,30 %** .

Dist. Normal no Excel

Se você quiser aprender mais sobre distribuição normal, visite o Site do Prof. Bertolo:

http://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/EstatisticaNosNegocios/l6.html

Exercícios

1. Uma empresa deseja realizar investimentos no mercado financeiro utilizando seus excedentes de caixa. O gerente financeiro selecionou dois ativos A e B, para serem analisados. O ativo A apresenta um retorno esperado de 20% e o desvio-padrão do retorno de 16%. O ativo B tem um retorno esperado de 26% e desvio-padrão do retorno de 25%. O gerente financeiro decidiu investir no ativo B. Analise a decisão de investimento tomada.

2. Abaixo, são apresentados os retornos esperados da ação de uma empresa de capital aberto e do mercado, considerando três cenários prováveis:

Cenários	Probabilidades	Retorno de mercado	Retorno da ação da empresa
Otimista	30%	24%	18%
Mais provável	50%	16%	12%
Pessimista	20%	6%	-3%

Pede-se apurar:

a. Retorno esperado da ação da empresa;

b. Retorno esperado do mercado;

c. Desvio-padrão e variância dos retornos da ação da empresa.

Exercícios

3. Determinar o desvio-padrão dos títulos A e B, cujos retornos e respectivas probabilidades são dados a seguir:

Título A		Título B	
Retorno	Probabilidades	Retorno	Probabilidade
8%	15%	5%	40%
10%	20%	10%	30%
11%	30%	15%	20%
18%	35%	22%	10

4. Calcular o retorno esperado, o desvio-padrão e o coeficiente de variação dos investimentos que oferecem os seguintes resultados e probabilidades:

Investimento A		Investimento B	
Retorno Esperado	Probabilidades	Retorno Esperado	Probabilidade
$ 300	25%	$ 600	26%
$ 400	25%	$ 700	23%
$ 500	18%	$ 200	19%
$ 450	22%	$ 100	15%
$ 200	10%	$ 150	17%

A Teoria de Carteira (*Portfolio*) de Markowitz

Até agora consideramos o grau de risco dos ativos tomados isoladamente!!

Uma **carteira** (*portfólio*, em inglês) é uma combinação de ativos, tais como investimentos, ações, obrigações, *commodities*, investimentos em imóveis, títulos com liquidez imediata ou outros ativos em que uma pessoa física ou jurídica possa investir e que possa manter (SAMANEZ, 2006, p.183).

O investidor, ao formar uma carteira, busca reduzir o risco por meio da diversificação.

Os bancos, fundos de investimentos e de pensão, seguradoras, fundos mútuos, etc. têm carteiras bem diversificadas.

A Teoria de Carteira (*Portfolio*) de Markowitz

O conceito mais moderno de diversificação e quantificação do risco de portfólio é atribuído, em grande parte, a Henry Markowitz, cuja essência de seu estudo é concentrada na famosa obra *Portfólio Selection:efficient diversification of investments*, editada em 1959 pela *John Wiley*.

A teoria do portfólio trata essencialmente da composição de uma carteira ótima de ativos, tendo por objetivo principal maximizar a *utilidade* (grau de satisfação) do investidor pela relação risco/retorno. Apesar de a ideia da diversificação de investimentos – refletida no dito popular "Não coloque todos os ovos em uma mesma cesta" – não ser algo novo, foi Markowitz quem a formalizou e a aplicou aos instrumentos financeiros. Ele partiu da premissa de que a decisão sobre a composição de uma carteira de investimentos está fundamentada apenas no valor esperado e no desvio padrão dos retornos da carteira, e que essa decisão é consequência de um processo de minimização de risco (minimização de desvio-padrão). Markowitz ganhou o prêmio Nobel de Economia em 1990

Retorno Esperado de um Portfolio

Define-se o **retorno esperado** $E(R_p)$ de uma *carteira* (portfólio) composta por vários ativos como a *média ponderada* do retorno esperado de cada ativo individual $E(R_k)$, em que os pesos são dados pela participação de cada ativo no total da carteira.
Para uma carteira constituída por **n** ativos, o *retorno esperado* da carteira é dado por:

$$E(R_P) = \sum_{k=1}^{n} E(R_K)\ x\ Participação_K$$

É a expectância.
Percentuais do valor da carteira total correspondentes a cada ativo específico.

EXEMPLO

Admita uma carteira composta por duas ações (A e B). O retorno esperado da ação A, R_A, é de 20% e o da ação B, R_B, é de 40%. Suponha também que 40% da carteira estejam aplicados na ação A, sendo, portanto, os 60% restantes aplicados na ação B. Calcule o **retorno esperado** R_P desta carteira.

Solução

$E(R_P)$ = (peso de A) x $E(R_A)$ + (peso de B) x $E(R_B)$ = 0,40 x 20% + 0,6 x 40% = 8% + 24% = 32%.

Na HP-12C, temos:

f Σ 20 ENTER 0.40 Σ+ 40 ENTER 0.60 Σ+ **g** $\bar{x}_w$ 32%

Conclusão: Se a carteira fosse composta apenas pela ação A, o retorno esperado R_A seria 20%, subindo para 40% se ela fosse composta apenas da ação B. Assim o retorno esperado da carteira toda, 32%, depende da proporção investida em cada ativo que a compõe.

Exemplo no Excel

35				
36	participação no portfolio	40%	60%	
37	Retorno Esperado das Ações	20,00%	40,00%	
38	Retorno Esperado da Carteira	32,0%	=SOMARPRODUTO(B36:C36;B37:C37)	
39				
40				

Exercícios de Fixação

1. Retornemos ao caso das ações LMTC10 e UDNZ15 de um exemplo anterior e suponha que você colocou metade do seu dinheiro em cada uma. Qual o retorno esperado desta carteira para dois estados da economia: crescimento (probabilidade = 20%) e recessão (probabilidade = 80%).

Sugestão: Calcule os retornos esperados de cada ação nos dois estados da economia e depois calcule a média ponderada (50% de cada um) dos ativos na carteira para encontrar o retorno esperado da carteira.

2. Um investidor possui uma carteira de ações constituída por ações da Cia. X e da Cia. Y, sendo R$ 35.0000,00 o valor das ações da Cia. X e R$ 75.000,00, o valor das ações da Cia. Y. O retorno esperado das ações da Cia. X é 12% enquanto o retorno esperado das ações da Cia. Y é 20%. Calcular o retorno esperado desta carteira.

Resp: $E(R_P) = 17{,}44\%$.

Exercício 1 no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E–H
73					
74					
75	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados	Retorno dos Títulos de Acordo com o		
76			Resultados Esperados da Ação LMTC10	Resultados Esperados da Ação UDNZ15	As células com os dados foram formatadas para geral e porcentagem
77	Crescimento	0,20	70%	30%	
78	Recessão	0,80	-20%	10%	
79					
80			maneira 1		maneira 2
81	Retorno Esperado $E(R_A)$	-2%	=B3*C3+B4*C4		=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;$C$3:$C$5)
82	Retorno Esperado $E(R_B)$	14%	=B3*D3+B4*D4		=SOMARPRODUTO($B$3:$B$4;$D$3:$D$4)
83					
84	participação no portfolio	50%	50%		
85	Retorno Esperado das Ações	-2,00%	14,00%		
86	Retorno Esperado da Carteira	6,0%	=SOMARPRODUTO(B84:C84;B85:C85)		
87					
88					

Exemplo 2

Considere os portfolios seguintes e seus respectivos retornos (em porcentagem) durante os últimos seis meses.

A			B		
ValorInicial	Retorno(%)	Valor Final	ValorInicial	Retorno(%)	Valor Final
1.000	0,75	1.008	1.000	1,50	1.015
1.008	1,00	1.018	1.015	5,00	1.066
1.018	3,00	1.048	1.066	12,00	1.194
1.048	-1,50	1.032	1.194	-9,00	1.086
1.032	0,50	1.038	1.086	-4,00	1.043
1.038	2,00	1.058	1.043	1,50	1.058

Ambos os portfólios terminam o período aumentando em valor de $1.000 para $1.058. Entretanto, eles diferem claramente na volatilidade .O s retornos mensais do Portfólio A variam de -1,5% a 3,0% enquanto os do Portfólio B variam de -9,0% a 12,0%.

O desvio padrão dos retornos é uma medida melhor da volatilidade daquele intervalo porque ele leva em conta todos os valores. Assim o desvio padrão dos seis retornos para o Portfólio A é 1,52; para o Portfolio B é 7,24

Exercícios Propostos

1. Quais são os pesos de uma carteira com 50 ações que estão sendo negociadas a $ 45 cada uma e 30 ações vendidas a $ 65 cada?

2. Você tem uma carteira com $ 1.000 investidos na ação A e $ 2.000 na ação B. Se os retornos esperados destas ações forem 18% e 12%, respectivamente, qual será o retorno esperado da carteira?

3. Você possui uma carteira que tem 40% investidos na ação X, 35% na ação Y e 25% na ação Z. Os retornos esperados dessas três ações são iguais a 10%, 16% e 23%, respectivamente. Qual é o retorno esperado dessa carteira?

4. Você tem $ 100.000 para aplicar em uma carteira de ações. Suas opções são a ação H, com retorno esperado de 20% e a ação L, com retorno esperado de 12%. Sendo seu objetivo criar uma carteira com retorno esperado de 17%, quanto dinheiro você deveria investir na ação H? E na ação L?

5. Uma carteira tem 40% investidos na ação G, 40% na ação J e 20% na ação K. Os retornos esperados dessas ações são iguais a 12%, 18% e 34%, respectivamente. Qual é o retorno esperado da carteira? Como você interpreta a sua resposta?

A Variância de uma Carteira

A **variância** de uma carteira (portfólio) de ativos é simplesmente o valor esperado (ou expectância) dos quadrados dos desvios dos retornos observados da carteira em torno do retorno do retorno esperado da carteira:

$$\sigma^2_{portfólio} = E(R_P - \bar{R}_P)^2$$

$$\sigma^2_{portfólio} = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R}_i) w_i\right)^2$$

EXEMPLO

As distribuições de probabilidades das taxas de retorno para três empresas, a Capivara Co., a Berts Co., e a Guaraná Brasil Co.estão mostradas abaixo:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Retorno dos títulos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Capivara Co.	Resultados esperados da Berts Co.	Resultados esperados da Guaraná Brasil Co.
Expansão	0,30	100%	20%	50%
Normal	0,40	15%	15%	15%
Recessão	0,30	(70%)	10%	0

Encontre:

a. O retorno esperado, o desvio padrão e a variância de uma carteira com um montante igual investidos em cada uma das três empresas.

b. O retorno esperado, o desvio padrão e a variância da carteira, se metade do investimento total tivesse sido na *Capivara Co* e o restante dividido igualmente entre a *Berts Co.* e a *Guaraná Brasil Co*.

Solução

Solução

O retorno esperado de cada título da carteira, para os 3 estados da economia, será:

$E(R_{capivara})$ = 0,3 x 100% + 0,4 x 15% + 0,3 x (-70%) = 30+6+(-21)= 15%
$E(R_{berts})$ = 0,3 x 20% + 0,4 x 15% + 0,3 x 10% = 6+6+3= 15%
$E(R_{guaraná})$ = 0,3 x 50% + 0,4 x 15% + 0,3 x 0 = 15+6= 21%

$E(R_{título})$ para os três estados da economia

O retorno esperado da *carteira* toda, com **igual** montante investidos em cada uma das três empresas:

$E(R_{carteira})$ = 1/3 x 15% + 1/3 x 15% + 1/3 x 21% = 5% + 5% + 7% = 17%

Outra maneira de fazer este cálculo seria:

Expansão...$E(R_{carteira})$ = 1/3 x 100% + 1/3 x 20% + 1/3 x 50% = 1/3 x 170% = 56,67% ≅ 57%
Normal...$E(R_{carteira})$ = 1/3 x 15% + 1/3 x 15% + 1/3 x 15% = 1/3 x 45% = 15%
Recessão...$E(R_{carteira})$ = 1/3 x (-70%) + 1/3 x 10% + 1/3 x 0% = -1/3 x 60% = -20%

$E(R_{carteira})$ para cada estado j da economia

O retorno esperado da carteira toda nos **três** estados da economia, com igual montante investidos em cada uma das três empresas, será :

$E(R_{carteira})$ = 0,3 x 1/3 x 170% + 0,4 x 1/3 x 45% + 0,3 x (-1/3 x 60%) =
= 17% + 6% - 6% = 17%

A simples intuição poderia sugerir que a variância de uma carteira é uma combinação simples das variâncias dos ativos componentes da carteira. Assim, a variância esperada da carteira com igual montante investidos em cada uma das três empresas seria:

$Var(R_{carteira}) = 1/3 \times (0{,}15 - 0{,}17)^2 + 1/3 \times (0{,}15 - 0{,}17)^2 + 1/3 \times (0{,}21 - 0{,}17)^2$ = 0,000133 + 0,000133 + 0,000533 = 0,000799

Solução cont....

Isto é, a variância dos retornos esperados de cada empresa daquele da carteira, ponderado pela participação de cada empresa na carteira. Infelizmente, essa abordagem está completamente errada!!

A **verdadeira variância** é calculada como segue:

$Var(R_{carteira}) = E(R_{ij}{}^{c} - \bar{R}_i{}^{c}) = \sum_j^n p_j x (R_{ij}{}^{c} - \bar{R}_i{}^{c})^2$ Aqui i se refere ao tipos de participção e j aos estados da economia.

$Var(R_{carteira}) = 0{,}3 \times (0{,}57 - 0{,}17)^2 + 0{,}4 \times (0{,}15 - 0{,}17)^2 + 0{,}3 \times (-0{,}20 - 0{,}17)^2$ =
0,3 x 0,1600 + 0,4 x 0,0004 + 0,3 x 0,1369 = 0,04800 + 0,00016 + 0,04107 = 0,08923

O desvio padrão é dado por

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}04507} = 0{,}29871$ ou 29,87%

O retorno esperado da carteira com **metade do investimento na Capivara e o restante na Berts e na Guaraná Brasil** será:

$E(R_{carteira})$ = 0,5 x 15% + 0,25 x 15% + 0,25 x 21% = 7,5% + 3,75% + 5,25% = **16,5%**

Outra maneira de fazer este cálculo seria:

Expansão...$E(R_{carteira})$ = 0,5 x 100% + 0,25 x 20% + 0,25 x 50% = 67,5%
Normal...$E(R_{carteira})$ = 0,5 x 15% + 0,25 x 15% + 0,25 x 15% = 15%
Recessão...$E(R_{carteira})$ = 0,5 x (-70%) + 0,25 x 10% + 0,25 x 0% = -32,5%

$E(R_{carteira})$ para cada estado j da economia

O retorno esperado da carteira nos **três** estados da economia com montante investidos em cada uma das três empresas dados no item b, será:

$E(R_{carteira})$ = 0,3 x 67,5%+ 0,4 x 15% + 0,3 x (-32,5%) = 20,25% + 6% - 9,75% = **16,5%**

A verdadeira variância é calculada como segue

$Var(R_{carteira}) = 0{,}3 \times (0{,}675 - 0{,}165)^2 + 0{,}4 \times (0{,}15 - 0{,}165)^2 + 0{,}3 \times (-0{,}325 - 0{,}165)^2$ = 0,3 x 0,2601 + 0,4 x 0,000225 + 0,3 x 0,2401 = 0,07803 + 0,00009 + 0,07203 = 0,15015

O desvio padrão é dado por

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}15015} = 0{,}387492$ ou 38,75%

Exemplo no Excel

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Probabilidade do Estado	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado			Participações ou Pesos na Carteira						
2		Retornos Esperados da Capivara Co.	Retornos Esperados da Berts Co.	Retornos Esperados da Guaraná Brasil Co.		Participação 1 da Capivara Co.	Participação 1 da Berts Co.	Participação 1 da Guaraná Brasil Co.	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item a	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item b	
3	0,3	100%	20%	50%	item a	0,333333333	0,333333333	0,333333333	56,67%	67,50%	=SOMARPRODUTO(C3:E3;$G$5:$I$5)
4	0,4	15%	15%	15%					15,00%	15,00%	
5	0,3	-70%	10%	0%	item b	0,5	0,25	0,25	-20,00%	-32,50%	=SOMARPRODUTO(C5:E5;$G$5:$I$5)
6	Retorno esperado de cada Título i	15,00%	15,00%	21,00%				Retorno Esperado da Carteira ⇒	17,00%	16,50%	=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;K3:K5)
7	Retorno Esperado da Carteira	17,00%	16,50%	=SOMARPRODUTO(G5:I5;C6:E6)		Duas formas distintas de se fazer o mesmo cálculo !!!					
8	Variância da Carteira	0,08843	0,15015	=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;K10:K12)							
9	Desvio Padrão da Carteira	29,74%	38,75%	=RAIZ(D8)					Tabela Auxiliar		
10								=(J3-$J$6)^2	15,73%	26,01%	=(K3-$K$6)^2
11									0,04%	0,02%	
12									13,69%	24,01%	
13											
14											

Exercícios

1. Dadas as informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,10	-0,20	0,30
Normal	0,60	0,10	0,20
Crescimento	0,30	0,70	0,50

Com os retornos esperados $E(R_A)$ = 25% e $E(R_B)$ = 30%; variâncias $\sigma_A^2 = 0{,}0945$ e $\sigma_B^2 = 0{,}0180$ e desvios-padrões σ_A = 30,74% e σ_B = 13,42%. Suponha que você disponha de \$ 20.000, no total. Se você tivesse aplicado \$ 6.000 na ação A e o restante na ação B, quais teriam sido o retorno esperado e o desvio-padrão de sua carteira? Respostas: $E(R_P)$ = 28,50%; a variância $\sigma_P^2 = 0{,}03245$ e desvio-padrão σ = 18,01%.

Exercícios

2. Considere as seguintes informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B	Resultados esperados da Ação C
Expansão	0,65	0,14	0,18	0,26
Recessão	0,35	0,08	0,02	-0,02

a. Qual é o retorno esperado de uma carteira composta por essas três ações com pesos iguais?
b. Qual a variância de uma carteira que tem 25% investidos em A e B e 50% investidos em C?

Exercícios

3. Considere as seguintes informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B	Resultados esperados da Ação C
Expansão	0,20	0,11	0,35	0,18
Bom	0,50	0,06	0,15	0,11
Mau	0,25	0,04	-0,05	0,02
Recessão	0,05	0,00	-0,40	0,06

a. Sua carteira tem 30% investidos nas ações B e C e 40% na ação A. Qual é o retorno esperado da carteira?
b. Qual é a variância da carteira? E o desvio-padrão?

COVARIÂNCIA
de Carteira com 2 Ativos

As medidas estatísticas que procuram relacionar duas variáveis aleatórias (no nosso caso os retornos) com objetivo de identificar o comportamento das mesmas são a *covariância* e a *correlação*.

A covariância procura identificar como os valores se correlacionam entre si. Em outras palavras, medem como X e Y, movimentam-se ao mesmo tempo em relação a seus valores médios.

A expressão de cálculo da covariância é:

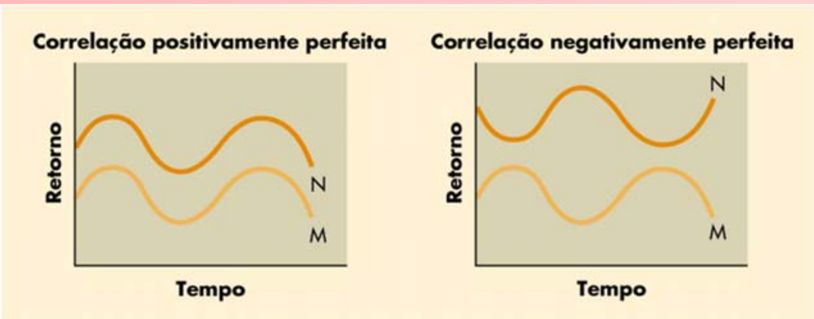
$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_X - \bar{R}_X)(R_Y - \bar{R}_Y)}{N-1} \quad \text{...para amostras}$$

$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_X - \bar{R}_X)(R_Y - \bar{R}_Y)}{N} \quad \text{...para população}$$

O valor real da covariância não é significante porque ele não é afetado pela a escala das duas variáveis. Isto é o porquê de se calcular o coeficiente de correlação (que veremos posteriormente) – para tornar algo interpretável da informação da covariância.

COVARIÂNCIA
de Carteira com 2 Ativos

1. Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for positiva ($COV_{X,Y} > 0$), significa que os retornos esperados apresentam a *mesma tendência*, isto é, o desempenho de um acompanha o do outro. A valorização de um reflete tendência de valorização do outro, e vice-versa. Neste caso, diz-se que os ativos são *positivamente correlacionados*.
2. Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for negativa ($COV_{X,Y} < 0$), significa que os retornos esperados apresentam *relações inversas*. Assim, se o retorno de um deles aumentar o do outro diminuirá. Neste caso, diz-se que os ativos são *negativamente correlacionados*.
3. Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for nula ($COV_{X,Y} = 0$), significa que não existe associação alguma entre os dois ativos



EXEMPLO

Considere o retorno do Ibovespa e da taxa de câmbio durante um período de cinco anos, no Brasil, dada por:

Ano	Dólar (X)	Ibovespa(Y)	X - $\bar{X}$	Y - $\bar{Y}$	(X - $\bar{X}$) – (Y - $\bar{Y}$)
2002	24,6%	-17%	25,2%	-48,7%	-12,3%
2003	4,8%	97,30%	5,3%	65,6%	3,5%
2004	-4,7%	17,80%	-4,2%	-13,9%	0,6%
2005	-16,8%	27,70%	-16,3%	-4,0%	0,7%
2005	-10,6%	32,90%	-10,0%	1,2%	-0,1%
Média	$\bar{X}$ = -0,5%	$\bar{Y}$ = 31,7%			SOMA = -7,63%

Calcule a COV_{XY}.

Como aconteceu com os ativos deste exemplo, com COV < 0, haverá uma redução no risco de uma carteira contendo apenas eles dois. Ocorrendo a desvalorização de um ativo, é esperada a valorização do outro. A essa situação dá-se o nome de HEDGING.

Solução

$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X-\bar{X})x(Y-\bar{Y})}{N} = \frac{-7{,}63\%}{5} = -1{,}526\%$$

A covariância calculada entre o Ibovespa e o dólar é negativa, indicando associação inversa entre os ativos. A tendência esperada é o retorno de um ativo se valorizar acima do seu valor médio quando o resultado de outro ficar abaixo.

Coeficiente de Correlação

A medida da intensidade da relação entre as variáveis aleatórias dispostas por meio de valores de X e Y, é medida pelo coeficiente de correlação, que varia de -1 a +1.

$$\text{coef. correlação} = \frac{\text{covariância entre x e y}}{\left(\begin{matrix}\text{Desvio padrão}\\ \text{de x}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Desvio padrão}\\ \text{de y}\end{matrix}\right)}$$

$$r_{X,Y} = \frac{COV_{X,Y}}{s_X\, s_Y}$$ .....para amostras

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV_{X,Y}}{\sigma_X\, \sigma_Y}$$ ....para populações

Vale ressaltar que a divisão da covariância pelo produto dos desvios padrão não modifica as suas propriedades; simplesmente a normaliza para que assuma valores entre -1 e +1.

EXEMPLO

Considere o retorno do Ibovespa e da taxa de câmbio nos últimos cinco anos no Brasil dada por:

Ano	Dólar (X)	Ibovespa(Y)	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X}).(Y - \bar{Y})$
2002	24,6%	-17%	6,3%	23,8%	-12,3%
2003	4,8%	97,30%	0,3%	43,0%	3,5%
2004	-4,7%	17,80%	0,2%	1,9%	0,6%
2005	-16,8%	27,70%	2,6%	0,2%	0,7%
2006	-10,6%	32,90%	1,0%	0,0%	-0,1%
Média	$\bar{X}$ = -0,5%	$\bar{Y}$ = 31,7%	SOMA=10,43%	SOMA=68,86%	SOMA = -7,63%

Calcule o coeficiente de correlação.

Solução

$$r_{X,Y} = \frac{-7{,}63\%}{\sqrt{10{,}43\%}\sqrt{68{,}86\%}} = -0{,}28464$$

Exemplo na HP-12C

f Σ

17 CHS ENTER 24.6 Σ+ aparece 1.00 no visor, indicando a entrada do primeiro par de dados

97.30 ENTER 4.8 Σ+

17.80 ENTER 4.7 CHS Σ+

27.70 ENTER 16.8 CHS Σ+

32.90 ENTER 10.6 CHS Σ+

g $\bar{x}$ ..... -0.54 média da variável X ... Dólar

x<>y .....31.74 média da variável Y ...Ibovespa

1 g $\hat{y},r$ .... 30.61 retorna o valor de Y da reta de regressão quando X = 1. Não INTERESSA!

x<>y .... -0.28474 retorna o coeficiente de Correlação entre as variáveis X e Y

Este coeficiente de correlação *simples* (2 variáveis) visa explicar o grau de relacionamento verificado no comportamento das duas variáveis X (Dólar) e Y(Ibovespa). Ele mede o grau de relacionamento entre as variáveis dispostas por meio de valores de X e Y em torno da reta de regressão. Os valores deste coeficiente de correlação varia entre -1 e +1.

A correlação NEGATIVA que encontramos indica que quando o Dólar cai o Ibovespa tende a subir, e vice-versa. Por que isto ocorre do ponto de vista econômico? É capital estrangeiro entrando no país e, consequentemente um aumento de demanda por ações!

Exemplo no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ano	Dólar (X)	IBOVESPA (Y)	$(X - X_{med})^2$	$(Y - Y_{med})^2$	$(X - X_{med}).(Y - Y_{med})$	
2	2002	24,6%	-17,0%	6,3%	23,8%	-12,3%	=(B2-$B$7)*(C2-$C$7)
3	2003	4,8%	97,3%	0,3%	43,0%	3,5%	
4	2004	-4,7%	17,8%	0,2%	1,9%	0,6%	
5	2005	-16,8%	27,7%	2,6%	0,2%	0,7%	
6	2006	-10,6%	32,9%	1,0%	0,0%	-0,1%	
7	Média	-0,5%	31,7%	10,43%	68,86%	-7,63%	
8		=MÉDIA(B2:B6)	=MÉDIA(C2:C6)	=SOMA(D2:D6)	=SOMA(E2:E6)	=SOMA(F2:F6)	
9							
10		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=F7/(RAIZ(D7)*RAIZ(E7))			
11		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=CORREL(B2:B6;C2:C6)			
12							
13							

Coeficiente de Correlação

Investimentos em ativos com coeficientes de correlação semelhantes não contribuem para redução do risco total, visto que todos eles convergem para ganhos quando a situação econômica lhes for favorável, e para perdas e, épocas desfavoráveis. Para redução do risco de carteiras de investimentos, é importante selecionar ativos com diferentes magnitudes de <u>correlação</u>. Ao diversificar a natureza das aplicações, o risco do portfólio reduz-se, sendo os *prejuízos* eventualmente apurados no setor <u>absorvidos</u> por somente uma parte das aplicações realizadas, e não pelo seu total.

O tipo de relação está representada pelo coeficiente de correlação:

r =+1 correlação perfeitamente positiva

0 < r < 1 relação positiva

r = 0 nenhuma relação

-1 < r < 0 relação negativa

r = -1 correlação perfeitamente negativa

Você pode determinar o grau de correlação observando o gráfico de espalhamento.

O Coeficiente de Correlação r_{XY}.

É definido como:

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}$$

No exercício anterior, temos 13/(1,64x2,74) = 0,72.

$$-1 \le r_{XY} \le 1.$$

- Se r = +1 .... As duas séries de valores estão PERFEITAMENTE CORRELACIONADAS DE FORMA POSITIVA.
- Se r = -1 .... As duas séries de valores estão PERFEITAMENTE CORRELACIONADAS DE FORMA NEGATIVA.
- Se r = 0 .... Não há relação.

O coeficiente de determinação **r^2** mede a explicação da reta de regressão e pode ser obtido como elevando o coeficiente de correlação ao quadrado. O r^2 dá a porcentagem das variações de Y que podem ser explicadas pela variação de X.

O r_{XY} é encontrado na HP-12C toda vez que pressionamos **g $\hat{y}$,r** . Basta trocar a pilha x com a y. Aliás, é aquele valor que até agora jogamos fora.

Coeficiente de Correlação

- Se a relação é para cima existe **correlação positiva**.
- Se a relação é para baixo existe **correlação negativa**.

O coeficiente de correlação está limitado por –1 e +1. Quanto mais próximo o coeficiente estiver de –1 ou +1, mais forte é a correlação.

EXEMPLO

Suponhamos que os retornos de dois ativos durante 10 meses sejam dados como a 2ª e 3ª coluna da tabela a seguir. Quais os valores de $x_{Médio}$, $y_{Médio}$, das variâncias s_x^2, s_y^2 e do coeficiente de correlação $r_{X,Y}$?

Observação	x	y	Desvio de x $x - x_{Médio}$	Desvio Quadrado de x $(x - x_{Médio})^2$	Desvio de y $y - y_{Médio}$	Desvio Quadrado de y $(y - y_{Médio})^2$	Produto dos desvios $(x - x_{Médio})(y - y_{Médio})$
1	12	50	-1,50	2,25	8,40	70,56	-12,60
2	13	54	-0,50	0,25	12,40	153,76	-6,20
3	10	48	-3,50	12,25	6,40	40,96	-22,40
4	9	47	-4,50	20,25	5,40	29,16	-24,30
5	20	70	6,50	42,25	28,40	806,56	184,60
6	7	20	-6,50	42,25	-21,60	466,56	140,40
7	4	15	-9,50	90,25	-26,60	707,56	252,70
8	22	40	8,50	72,25	-1,60	2,56	-13,60
9	15	35	1,50	2,25	-6,60	43,56	-9,90
10	23	37	9,50	90,25	-4,60	21,16	-43,70
Soma	135	416	0,00	374,50	0,00	2342,40	445,00

Cálculos

$x_{Médio}$= 135/10 = 13,5

$y_{Médio}$= 416/10 = 41,6

s^2_x= 374,5/9 = 41,611

s^2_y= 2.342,4/9 = 260,267

r = $(445/9)/((41{,}611)^{1/2}(260{,}267)^{1/2})$ = 49,444/(6,451*16,133) = 0,475

Mais Exercícios e Correlação.

1. Os retornos anuais das ações X e Y durante os últimos 5 anos foram:

X	Y
12%	12%
15%	16%
12%	15%
11%	9%
14%	13%

a. Qual as médias dos retornos das ações X e Y? Resp: $x_{Médio}$ = 12,80 e $Y_{médio}$ =13%.
b. Quais os desvios padrões dos retornos das ações X e Y? S_A = 1,64 e S_B = 2,74.
c. Quais os coeficientes de variações das ações X e Y? CV_A = 0,13 e CV_B =0,21
d. Qual ação apresenta maior risco? A ação Y
e. Calcule a COVARIÂNCIA entre as ações X e Y.

A covariância resume num único número a tendência e a força da relação linear entre 2 variáveis, e é dado por :

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$X_i - X_{Médio}$	$Y_i - Y_{Médio}$
-0,80	-1,00
2,20	3,00
-0,80	2,00
-1,80	-4,00
1,20	0,00

Inserir na HP-12C os dados ao lado . **RCL 6**. Iremos obter **13.** Após dividir este por **n-1.** O resultado será **3,25**

Conclusões

Anteriormente, estudamos o risco de apenas um ativo. A orientação formulada na análise de risco de uma carteira composta por **n** ativos é selecionar alternativas que levem à melhor *diversificação* e, consequentemente, redução do risco dos investimentos e, produza, ao mesmo tempo, um retorno admitido como aceitável no âmbito dos investidores de mercado.

Entende-se por **diversificação** a estratégia destinada à redução do risco de uma carteira pela diluição do capital em muitos ativos. Para exemplificar, uma empresa que mantenha produtos direcionados a diferentes mercados consumidores, pode compensar eventuais prejuízos em alguns produtos por resultados favoráveis em outros.

O risco de uma carteira é eliminado quando os investimentos apresentarem comportamentos opostos. Para entendermos melhor isto, vamos às outras medidas estatísticas.

Risco Sistemático e Não Sistemático

Para entender melhor a redução do risco mediante a diversificação, considere que o risco de um ativo tenha duas componentes:

- **Risco Sistemático ou Conjuntural** – está presente em todos os ativos negociados no mercado, sendo determinado por eventos de ordem política, econômica e social. Não há como evitá-lo, porém, mediante a diversificação da carteira de ativos, é possível reduzi-lo.
- **Risco Não Sistemático ou Característico** – é a componente do risco total que pode ser eliminada de uma carteira através da combinação de ativos que não possuam correlação positiva entre si (como veremos mais adiante). Por exemplo, comumente as carteiras diversificadas contêm títulos de renda fixa e de renda variável, os quais sofrem impactos diferentes de medidas de política econômica, como elevação das taxas de juros; ações de empresas cíclicas (montadoras de veículos, empresas de construção civil), de maior risco, são frequentemente combinadas com ações de empresas cujos negócios são menos afetados por flutuações econômicas, como indústria de alimentos.

Risco/Retorno de Portfolio para Dois Títulos: Efeitos de Correlação

- Relação de dependência do coeficiente de correlação ρ.
- $-1.0 \leq \rho \leq +1.0$
- Quanto mais baixa a correlação, maior a redução potencial do risco
- Se $\rho = +1.0$, nenhuma redução do risco é possível

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

		Taxa de Retorno	
Cenário	**Probabilidade**	**Fundo de Ações**	**Fundo de Títulos**
Recessão	33,3%	-7%	17%
Normal	33,3%	12%	7%
Explosão	33,3%	28%	-3%

Considere o seguinte mundo de dois ativos arriscados. Existe uma chance de 1/3 de cada estado da economia e os únicos ativos são um fundo de ações e um fundo de títulos.

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações: Taxa de Retorno	Fundo de Ações: Desvio Quadrado	Fundo de Títulos: Taxa de Retorno	Fundo de Títulos: Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações: Taxa de Retorno	Fundo de Ações: Desvio Quadrado	Fundo de Títulos: Taxa de Retorno	Fundo de Títulos: Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$E(r_S) = \frac{1}{3} \times (-7\%) + \frac{1}{3} \times (12\%) + \frac{1}{3} \times (28\%)$$

$$E(r_S) = 11\%$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

- E na HP-12C, como fazemos?

- f Σ limpamos os registros estatísticos
- 7 CHS $\Sigma+$ 12 $\Sigma+$ 28 $\Sigma+$
- g $\bar{x}$ 11

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações Taxa de Retorno	Fundo de Ações Desvio Quadrado	Fundo de Títulos Taxa de Retorno	Fundo de Títulos Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$E(r_B) = \frac{1}{3} \times (17\%) + \frac{1}{3} \times (7\%) + \frac{1}{3} \times (-3\%)$$

$$E(r_B) = 7\%$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

	Fundo de Ações		Fundo de Títulos	
Cenário	Taxa de Retorno	Desvio Quadrado	Taxa de Retorno	Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$(11\% - -7\%)^2 = 3.24\%$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

	Fundo de Ações		Fundo de Títulos	
Cenário	Taxa de Retorno	Desvio Quadrado	Taxa de Retorno	Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$(11\% - 12\%)^2 = 0{,}01\%$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações Taxa de Retorno	Fundo de Ações Desvio Quadrado	Fundo de Títulos Taxa de Retorno	Fundo de Títulos Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$(11\% - 28\%)^2 = 2,89\%$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações Taxa de Retorno	Fundo de Ações Desvio Quadrado	Fundo de Títulos Taxa de Retorno	Fundo de Títulos Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$2.05\% = \frac{1}{3}(3.24\% + 0.01\% + 2.89\%)$$

Retorno Esperado, Variância, e Covariância

Cenário	Fundo de Ações Taxa de Retorno	Fundo de Ações Desvio Quadrado	Fundo de Títulos Taxa de Retorno	Fundo de Títulos Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

$$14.3\% = \sqrt{0.0205}$$

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	Fundo de Ações Taxa de Retorno	Fundo de Ações Desvio Quadrado	Fundo de Títulos Taxa de Retorno	Fundo de Títulos Desvio Quadrado
Recessão	-7%	3,24%	17%	1,00%
Normal	12%	0,01%	7%	0,00%
Explosão	28%	2,89%	-3%	1,00%
Retorno esperado	11,00%		7,00%	
Variância	0,0205		0,0067	
Desvio Padrão	14,3%		8,2%	

Note que as ações têm um retorno esperado maior que os títulos e um risco maior. Voltemos agora para o *tradeoff* risco-retorno de um portfólio que está 50% investido em títulos e 50% investido em ações.

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	*Fundo de ações*	*Taxa de Retorno* *Fundo de títulos*	*Portfolio*	*desvio quadrático*
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno espeerado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

A taxa de retorno do portfolio é uma **média ponderada** dos retornos das ações e títulos no portfolio:

$$r_P = w_T r_T + w_A r_A$$

$$5\% = 50\% \times (-7\%) + 50\% \times (17\%)$$

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	*Fundo de ações*	*Taxa de Retorno* *Fundo de títulos*	*Portfolio*	*desvio quadrático*
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno espeerado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

A taxa de retorno do portfolio é uma média ponderada dos retornos das ações e títulos no portfolio:

$$r_P = w_T r_T + w_A r_A$$

$$9{,}5\% = 50\% \times (12\%) + 50\% \times (7\%)$$

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	Fundo de ações	Taxa de Retorno Fundo de títulos	Portfolio	desvio quadrático
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno espeerado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

A taxa de retorno do portfolio é uma ***média ponderada*** dos retornos das ações e títulos no portfolio:

$$r_P = w_T r_T + w_A r_A$$

$$12{,}5\% = 50\% \times (28\%) + 50\% \times (-3\%)$$

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	Fundo de ações	Taxa de Retorno Fundo de títulos	Portfolio	desvio quadrático
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno esperado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

A taxa de retorno *esperada* do portfolio é uma ***média ponderada*** dos retornos *esperados* dos títulos no portfolio.

$$E(r_P) = w_T E(r_T) + w_A E(r_A)$$

$$9\% = 50\% \times (11\%) + 50\% \times (7\%)$$

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	Fundo de ações	Taxa de Retorno Fundo de títulos	Portfolio	desvio quadrático
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno esperado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

A variância da taxa de retorno de de um portfólio com dois ativos arriscados é

$$\sigma_P^2 = (w_T\sigma_T)^2 + (w_A\sigma_A)^2 + 2(w_T\sigma_T)(w_A\sigma_A)\rho_{TA}$$

onde ρ_{TA} é o **coeficiente de correlação** entre os retornos dos fundos de ações e títulos.

Retorno e Risco para Portfolios

Cenário	Fundo de ações	Taxa de Retorno Fundo de títulos	Portfolio	desvio quadrático
Recessão	-7%	17%	5,0%	0,160%
Normal	12%	7%	9,5%	0,003%
Explosão	28%	-3%	12,5%	0,123%
Retorno esperado	11,00%	7,00%	9,0%	
Variância	0,0205	0,0067	0,0010	
Desvio Padrão	14,31%	8,16%	3,08%	

Observe o decrescimento no risco que a diversificação oferece.

Um portfólio igualmente ponderado (50% em ações e 50% em títulos) tem menos risco do que manter ações ou títulos isoladamente.

Exercícios do listão

Exercício 3

Uma carteira (portfólio) é composta por três ativos nas seguintes proporções: 20% (Ativo 1); 40% (Ativo 2) e 40% (Ativo 3). Se os retornos esperados dos ativos forem 10% (Ativo 1), 0% (Ativo 2) e 20% (Ativo 3) pode afirmar-se:

a) O retorno esperado da carteira é de 8%;
b) O retorno esperado da carteira é de 10%;
c) O retorno esperado da carteira é de 12%;
d) Nenhuma das respostas anteriores está certa.

Exercícios do listão

Exercício 4

Considere a informação constante da tabela que se segue relativa a três ações:

	Ação A		Ação B		Ação C	
Tempo	Cotação	Dividendo	Cotação	Dividendo	Cotação	Dividendo
1	7,5		5		10	
2	8,25		5,25		9,5	
3	8,91	0,25	5,67	0,21	9,40	0,38
4	9,8		6,29		10,4	
5	8,82		5,75		11	
6	9,26	0,27	5,4	0,15	10,2	0,22
7	9,54		5,9		10,8	

Determine:

a) O retorno porcentual em cada período;
b) Calcule o retorno esperado e a variância e o desvio padrão do retorno de cada ação;
c) Calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre todos os pares de ações;
d) Calcule o retorno médio e o desvio padrão das seguintes carteiras:

C1: 0,5*A + 0,5*B
C2: 0,5*A + 0,5*C
C3: 0,5*B + 0,5*C
C4: 1/3*A + 1/3*B + 1/3*C.

Exercícios do listão

Exercício 5

Relativamente a um conjunto de 4 títulos, conhece-se a seguinte informação:

Condições de Mercado	Probabilidade	Retorno Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3	Ativo 4
Boas	1/3	15	16	1	16
Médias	1/3	9	10	10	10
Más	1/3	3	4	19	4

Calcule o retorno esperado e a variância para cada dos 4 tipos de ativos.

Exercícios do listão

Exercício 6

Sabendo que a covariância entre dois títulos é de 0,25, e que a variância de um deles é de 0,40, pode afirmar-se:

a) Se a variância do outro título for 0,16, a variância de uma carteira em que os títulos têm pesos idênticos é de 0,265;

b) Se a variância do outro título for 0,35, então o coeficiente de correlação linear entre ambos é de 0,668;

c) As alíneas (a) e (b) estão corretas;

d) As alíneas (a) e (b) estão erradas.

Exercícios do listão

Exercício 7

Reportando-se aos dados da tabela constante do exercício 5, calcule:

a) O retorno esperado para uma carteira constituída pelos ativos 2 e 3 com pesos, respectivamente, de 60% e 40%.

b) Calcule o retorno esperado de uma carteira em que os ativos 1, 2 e 3 têm pesos iguais.

c) Calcule o retorno esperado para uma carteira em que os 4 ativol têm pesos iguais.

d) Calcule a covariância entre os ativos 2 e 3.

e) Calcule o coeficiente de correlação linear entre os ativos 1 e 2.

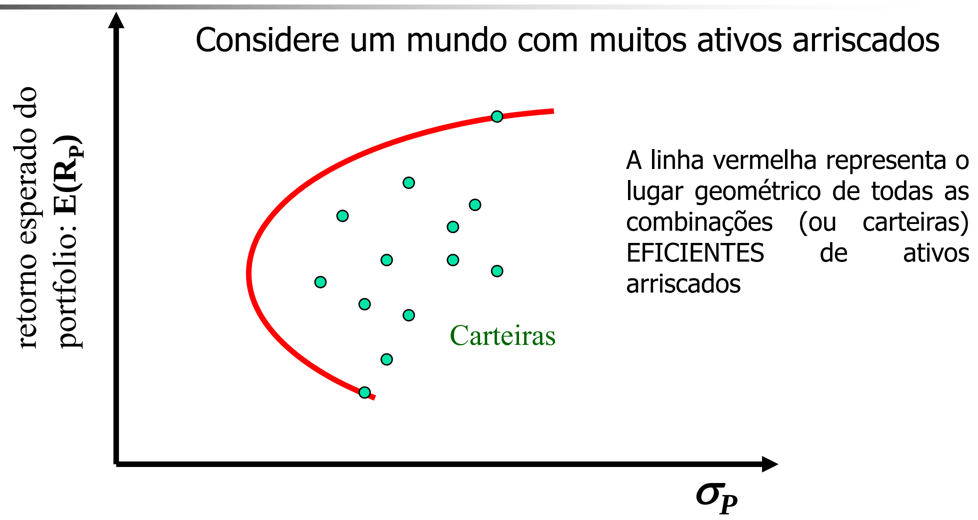
f) Calcule o coeficiente de correlação linear entre os ativos 2 e 3.

g) Calcule o coeficiente de correlação linear entre os ativos 1 e 3.

h) Calcule a variância da carteira referida na alínea a).

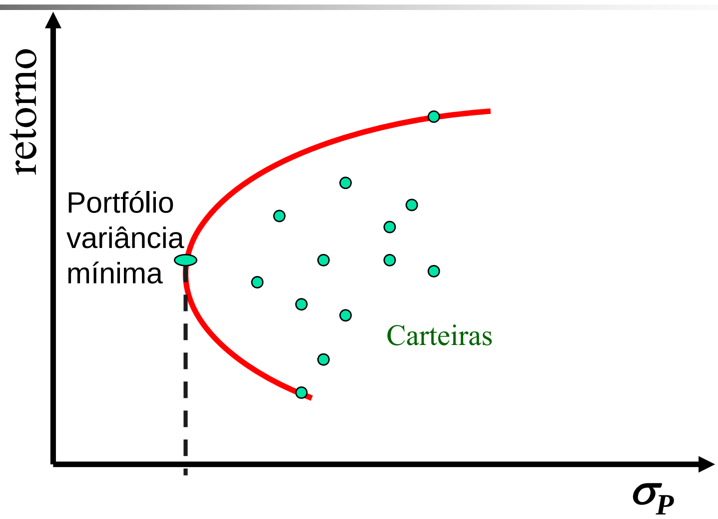
i) Calcule o desvio padrão da carteira referida na alínea b).

O *Set Opportunity* Eficiente para Muitos Ativos



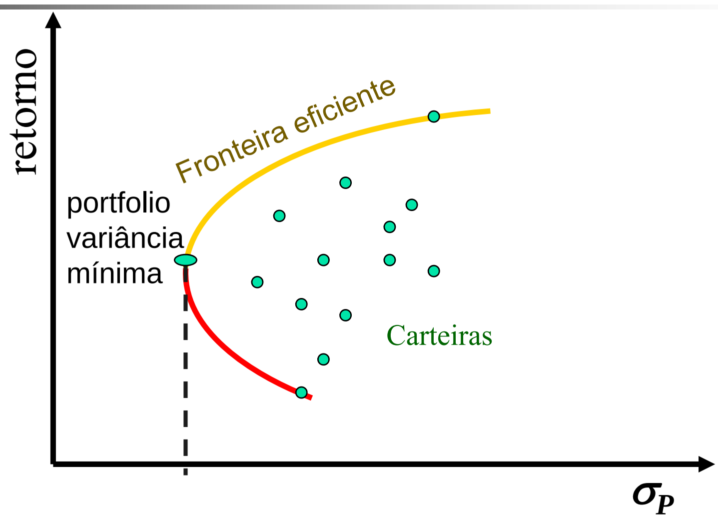
Identificamos a linha vermelha e contínua como o *opportunity set* (conjunto oportunidade) das combinações dos vários ativos.

O *Set* Eficiente para Muitos Ativos



Dado o *opportunity set* podemos identificar o **portfolio de variância mínima.**

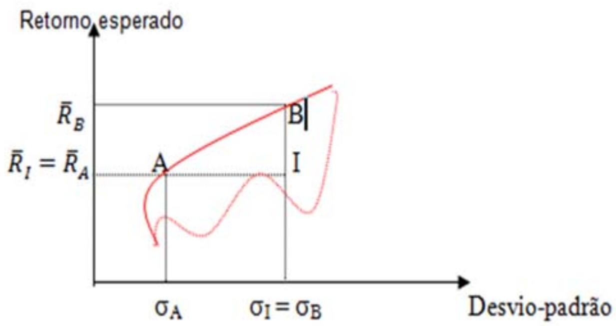
O *Set* Eficiente para Muitos Ativos



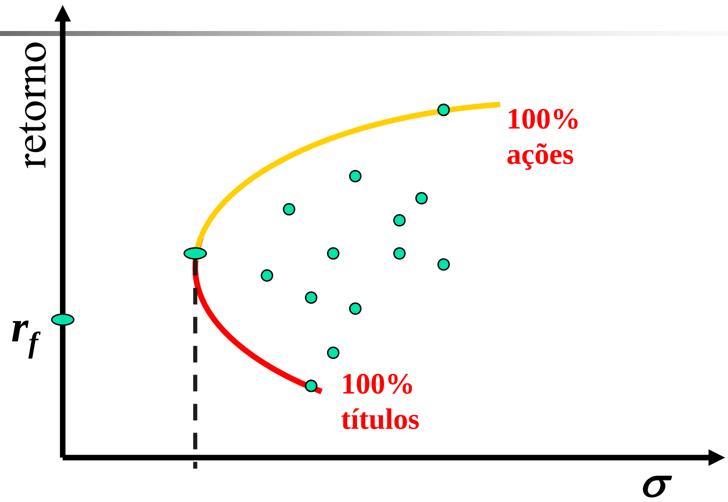
A seção do *opportunity set* acima do portfolio de variancia mínima é a fronteira eficiente.

Dominação

Diz-se que um ativo com risco **domina** outro quando, para o mesmo nível de risco, apresenta retorno esperado maior (no gráfico abaixo, B domina o I), ou quando, para o mesmo nível de retorno esperado, apresenta risco menor (no gráfico abaixo, A domina o I). Para um dado nível de risco, uma combinação situada na superfície da curva (carteira B) domina qualquer outra situada no espaço interno (carteira I), pois proporciona um retorno maior para o mesmo nível de risco.

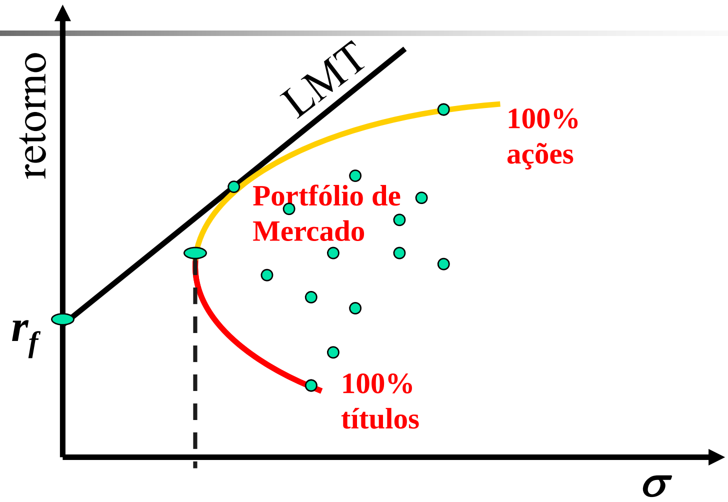


Portfólio Arriscado Ótimo com um Ativo Livre de Risco



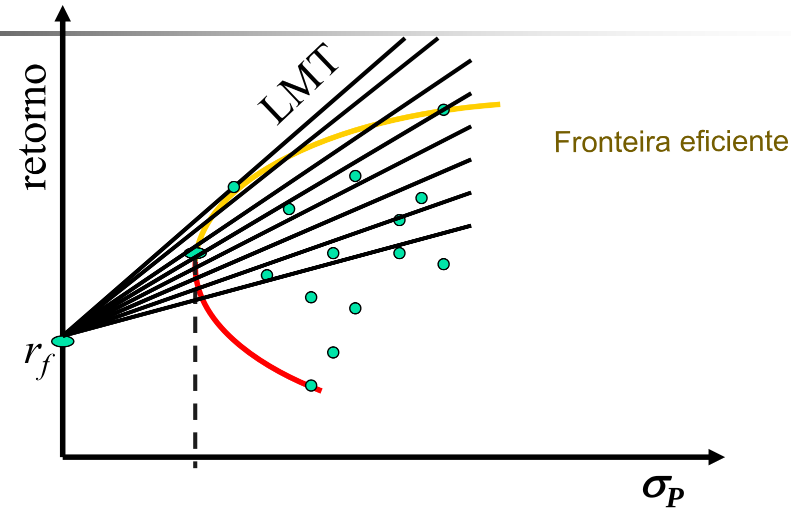
Além das ações e títulos, considere um mundo que também tenha títulos livres de risco como os *T-bills*

Tomar Emprestado e Emprestar Sem Risco



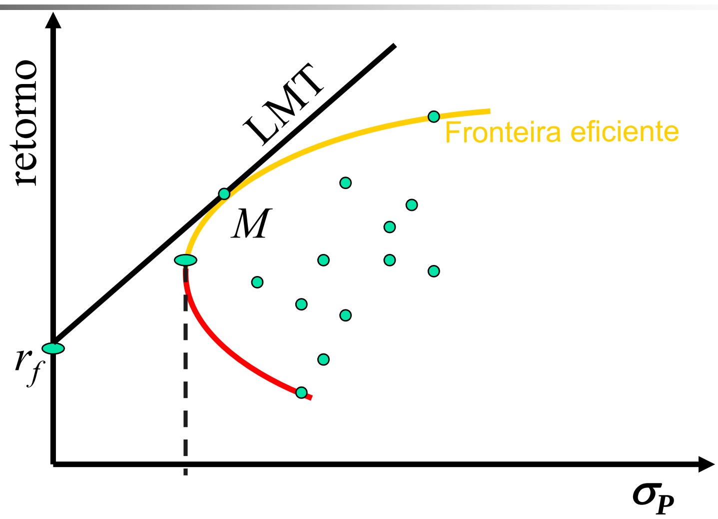
Agora os investidores podem alocar seu dinheiro entre *T-bills* e o portfólio de mercado.

Tomar Emprestado e Emprestar Sem Risco



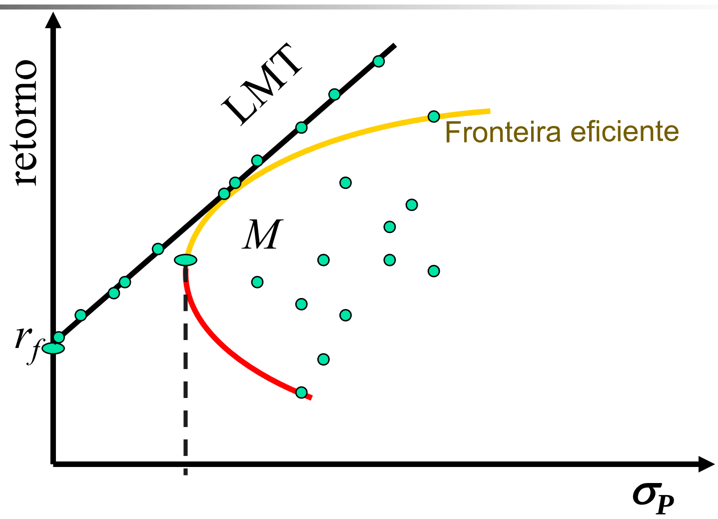
Com um ativo livre de risco disponível e a fronteira eficiente identificada, escolhemos a linha de alocação de capital disponível com a maior inclinação

Equilíbrio de Mercado



Com a linha de alocação de capital identificada, todos os investidores escolhem um ponto ao longo da linha – alguma combinação do ativo livre de risco e o portfolio de mercado *M*.

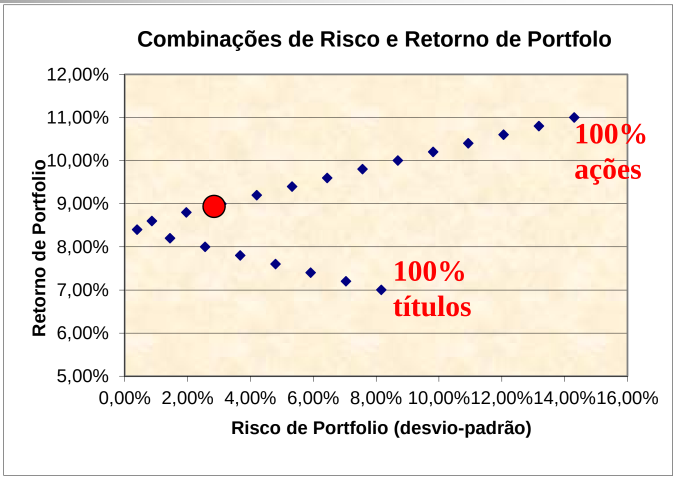
A Propriedade Separação



Investidores com aversão ao risco determinam onde eles permanecem ao longo da linha de alocação de capital — a linha por si só é a mesma para todos.

O *Set* Eficiente para Dois Ativos

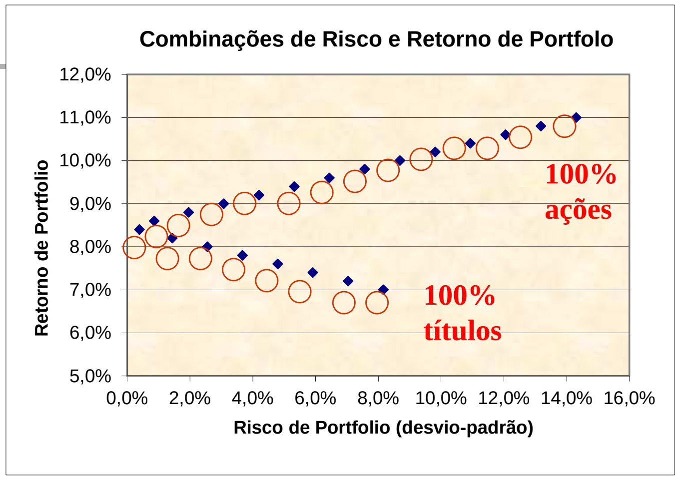
%em ações	Risco	Retorno
0%	7,0%	8,2%
5%	7,2%	7,0%
10%	7,4%	5,9%
15%	7,6%	4,8%
20%	7,8%	3,7%
25%	8,0%	2,6%
30%	8,2%	1,4%
35%	8,4%	0,4%
36%	8,4%	0,3%
40%	8,6%	0,9%
45%	8,8%	2,0%
50%	9,00%	3,08%
55%	9,2%	4,2%
60%	9,4%	5,3%
65%	9,6%	6,4%
70%	9,8%	7,6%
75%	10,0%	8,7%
80%	10,2%	9,8%
85%	10,4%	10,9%
90%	10,6%	12,1%
95%	10,8%	13,2%
100,0%	11,0%	14,3%



Podemos considerar outros pesos além de 50% em ações e 50% em títulos …

O Set Eficiente para Dois Ativos

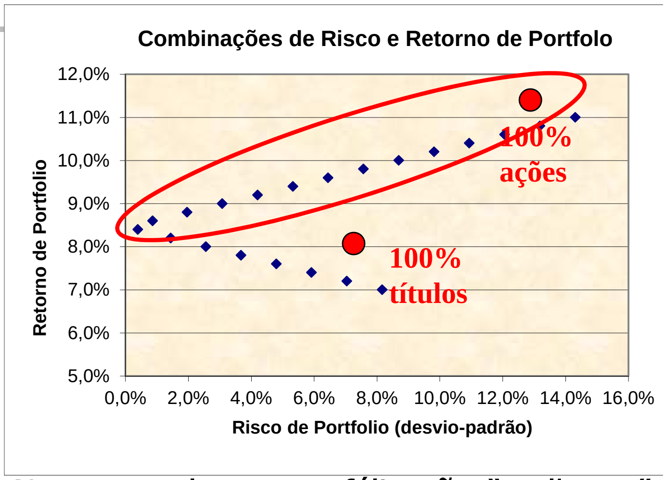
%em ações	Risco	Retorno
0%	7,0%	8,2%
5%	7,2%	7,0%
10%	7,4%	5,9%
15%	7,6%	4,8%
20%	7,8%	3,7%
25%	8,0%	2,6%
30%	8,2%	1,4%
35%	8,4%	0,4%
36%	8,4%	0,3%
40%	8,6%	0,9%
45%	8,8%	2,0%
50%	9,00%	3,08%
55%	9,2%	4,2%
60%	9,4%	5,3%
65%	9,6%	6,4%
70%	9,8%	7,6%
75%	10,0%	8,7%
80%	10,2%	9,8%
85%	10,4%	10,9%
90%	10,6%	12,1%
95%	10,8%	13,2%
100,0%	11,0%	14,3%



Podemos considerar outros pesos além de 50% em ações e 50% em títulos …

O Set Eficiente para Dois Ativos

%em ações	Risco	Retorno
0%	7,0%	8,2%
5%	7,2%	7,0%
10%	7,4%	5,9%
15%	7,6%	4,8%
20%	7,8%	3,7%
25%	8,0%	2,6%
30%	8,2%	1,4%
35%	8,4%	0,4%
36%	8,4%	0,3%
40%	8,6%	0,9%
45%	8,8%	2,0%
50%	9,00%	3,08%
55%	9,2%	4,2%
60%	9,4%	5,3%
65%	9,6%	6,4%
70%	9,8%	7,6%
75%	10,0%	8,7%
80%	10,2%	9,8%
85%	10,4%	10,9%
90%	10,6%	12,1%
95%	10,8%	13,2%
100,0%	11,0%	14,3%

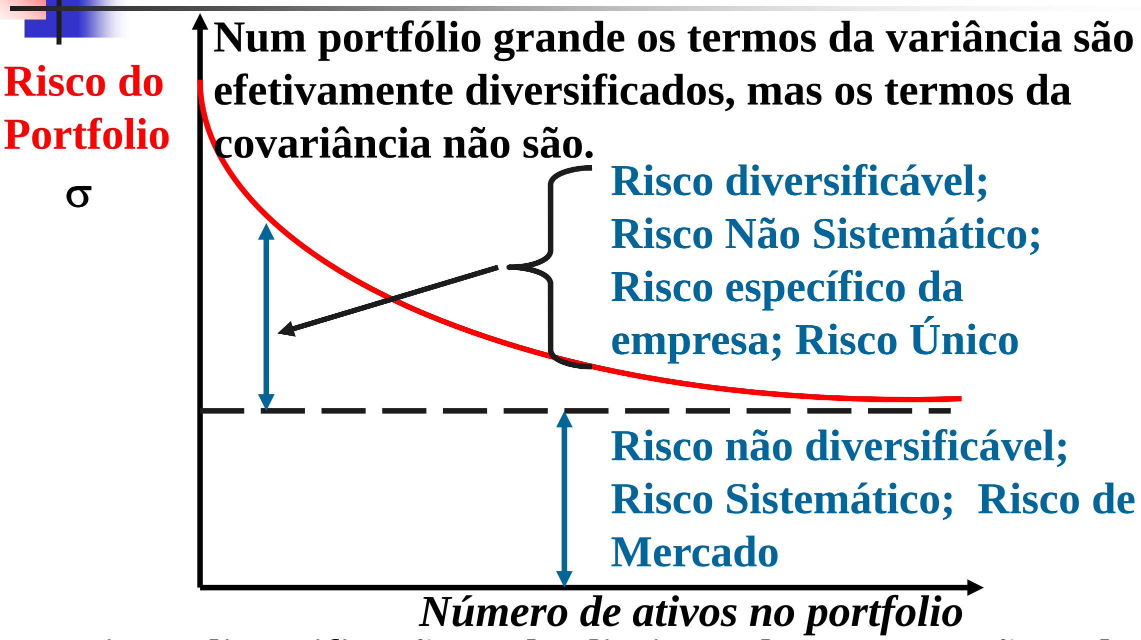


Note que alguns portfólio são "melhores" que outros. Eles têm retornos maiores para o mesmo nível de risco ou menos.

Estes formam a *fronteira eficiente*.

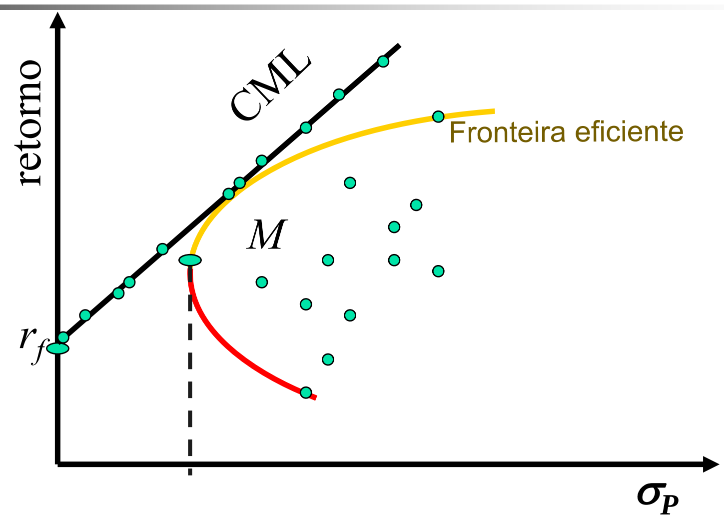
Risco de Portfolio como uma Função do Número de Ações no Portfolio

Num portfólio grande os termos da variância são efetivamente diversificados, mas os termos da covariância não são.



Assim a diversificação pode eliminar alguns, mas não todos os riscos dos títulos individualmente.

A Propriedade Separação



Investidores com aversão ao risco determinam onde eles permanecem ao longo da linha de alocação de capital — a linha por si só é a mesma para todos.

EXEMPLO

Admita os seguintes retornos dos ativos X e Y para os cenários considerados

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Retorno dos Ativos	
		Ativo X	Ativo Y
Expansão	0,30	28%	8%
Normal	0,40	14%	12%
Recessão	0,30	(4%)	7%

Calcule:
a. O retorno esperado de cada ativo;
b. O retorno esperado de uma carteira composta de partes iguais dos ativos;
c. O desvio padrão e a variância dos retornos de cada ativo;
d. O desvio padrão da carteira do item b.

SOLUÇÃO

Retorno esperado de cada ativo:

$E(R_X) = 0,3 \times 28\% + 0,4 \times 14\% + 0,3 \times (-4\%) = 12,8\%$

$E(R_Y) = 0,3 \times 8\% + 0,4 \times 12\% + 0,3 \times 7\% = 9,3\%$

$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 12,8\% + 0,5 \times 9,3\% = 11,05\%$

A variância dos ativos:

$\sigma_X^2 = 0,3 \times (28,0 - 12,8)^2 + 0,4 \times (14,0 - 12,8)^2 + 0,3 \times (-4,0 - 12,8)^2 = 154,56$

$\sigma_Y^2 = 0,3 \times (8,0 - 9,3)^2 + 0,4 \times (12,0 - 9,3)^2 + 0,3 \times (7,0 - 9,3)^2 = 5,01$

$\sigma_X = 12,43\%$ $\sigma_Y = 2,24\%$

$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 28\% + 0,5 \times 8\% = 18\%$ no estado de expansão

$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 14\% + 0,5 \times 12\% = 13\%$ no estado normal

$E(R_{carteira}) = 0,5 \times (-4\%) + 0,5 \times 7\% = 1,3\%$ no estado de recessão

$\sigma^2_{carteira} = 0,3 \times (18\% - 11,05\%)^2 + 0,4 \times (13\% - 11,05\%)^2 + 0,3 \times (1,3\% - 11,05\%)^2 = 44,53$

$\sigma_{carteira} = [44,53]^{1/2} = 6,67\%$

Para apurarmos o risco da carteira com base na ponderação dos retornos de cada ativo, precisamos incorporar em seus resultados a covariância dos ativos, isto é, para o cálculo do risco de carteira, é necessário levar em consideração não somente a participação e o risco de cada ativo individualmente, mas também como os ativos se correlacionam.

Modelo de Markowitz

As formulações utilizadas para cálculo do risco de um portfólio são provenientes do modelo desenvolvido por Markowitz, a quem foi concedido o Prêmio Nobel de Economia em 1999.

O desvio padrão de um portfólio é, portanto, função de:

- Desvio-padrão de cada ativo (σ_i)
- Participação (porcentual) de cada ativo na carteira
- Coeficiente de correlação dos ativos, ou covariância.

A expressão geral de cálculo do risco de uma carteira que contém n ativos, baseando-se no modelo de portfólio desenvolvido por Markowitz, é a seguinte:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_i \, w_j \, \rho_{i,j} \, \sigma_i \sigma_j}$$

Modelo de Makowitz para Carteira com 2 Ativos

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} w_i\, w_j\, \rho_{i,j}\, \sigma_i \sigma_j}$$

Para uma carteira com 2 ativos apenas, temos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{2} w_i \sigma_i (\rho_{i1}\, w_1 \sigma_1 + \rho_{i2} w_2 \sigma_2)}$$

Expandindo o somatório interno à raiz quadrada, ficamos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + w_1 \sigma_1\, \rho_{12} w_2 \sigma_2 + w_2 \sigma_2 \rho_{21} w_1 \sigma_1}$$

Modelo de Makowitz para Carteira com 2 Ativos

Como $\rho_{12} = \rho_{21}$, temos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 \sigma_1\, \rho_{12} w_2 \sigma_2}$$

Lembrando a definição de coeficiente de correlação,

$$\rho_{12} = \frac{COV(1,2)}{\sigma_1 \sigma_2},$$

podemos abreviar ainda mais esta última expressão.

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 COV(1,2)}$$

Esta expressão nos dá o desvio padrão para uma carteira com 2 ativos apenas.

EXEMPLO

Admita uma carteira formada de duas ações (X e Y), com os seguintes resultados esperados:

	Retorno E(R)	Desvio-padrão (σ)
Ação X	15,00%	20,00%
Ação Y	26,00%	30,00%

A participação de cada ação na carteira é w_X = 80% e w_Y = 20% e o coeficiente de correlação é ρ = +1.

Calcule:

- O retorno esperado da carteira
- O desvio padrão usando o modelo de Markowitz.

Solução

$E(R_{carteira})$ = 0,80 x 15% + 0,20 x 26% = 17,20%

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} w_i\, w_j\, \rho_{i,j}\, \sigma_i\sigma_j} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2COV(1{,}2)} =$$

$$\sqrt{(0{,}80^2x0{,}20^2) + (0{,}20^2x0{,}30^2) + 2x0{,}80x0{,}20x1x0{,}20x0{,}30} = \sqrt{0{,}0484} = 0{,}22$$ ou 22,00%

Exemplo no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F
13						
14		Retorno $E(R_{ação})$	Desvio Padrão σ	Participação	Coeficiente de correlação	
15	Ação X	15,00%	20,00%	80,00%	1	
16	Ação Y	26,00%	30,00%	20,00%		
17						
18		Retorno $E(R_{carteira})$	17,20%			
19		Desvio Padrão σ	22,00%	=RAIZ(D15^2*C15^2+D16^2*C16^2+2*D15*D16*E15*C15*C16)		
20			não tem uma função específica para isso !			
21						
22						
23						
24						

Exercício de Fixação

Repita o exemplo anterior para uma carteira constituída de 60% de ação X e 40% de ação Y e um coeficiente de correlação ρ = -1.

Aula de Risco.xlsx [Salvo pelo usuário]

	A	B	C	D	E	F
9						
10		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=F7/(RAIZ(D7)*RAIZ(E7))		
11		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=CORREL(B2:B6;C2:C6)		
12						
13						
14		Retorno E($R_{ação}$)	Desvio Padrão σ	Participação	Coeficiente de correlação	
15	Ação X	15,00%	20,00%	60,00%	-1	
16	Ação Y	26,00%	30,00%	40,00%		
17						
18		Retorno E($R_{Carteira}$)	19,40%			
19		Desvio Padrão σ	0,000000263%	=RAIZ(D15^2*C15^2+D16^2*C16^2+2*D15*D16*E15*C15*C16)		
20			não tem uma função específica para isso !			
21						
22						
23						

Diversificação vs Risco

Como vimos no exemplo anterior, a variância para uma carteira de **dois ativos** é dada por:

$$\sigma^2_{portfólio} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\,\rho_{1,2}\,\sigma_1\sigma_2$$

Observe que a variância da carteira é função da correlação entre os retornos dos ativos integrantes, medida pelo coeficiente de correlação ($\rho_{i,j}$), que varia entre -1 e +1. No caso de $\rho_{1,2}$ = +1, os ativos sobem ou descem juntos e, quando $\rho_{1,2}$ = -1, um ativo cai quando o outro sobe. O caso de $\rho_{1,2}$ = 0 significa independência entre os ativos.

A maior diminuição de risco da carteira será conseguida quando a correlação entre os ativos for $\rho_{1,2}$ = -1.

A diversificação permite, conforme proposta por Markowitz, a *redução* ou até a eliminação total do **risco diversificável** (não sistemático) de um portfólio. Fica, porém, sempre presente a parcela do risco sistemático.

Diversificação vs Risco

É importante que se acrescente, ainda, que a diversificação, quando utilizada com propósito de redução do risco, não é uma *decisão aleatória*. Deve sempre ser elaborada observando-se as correlações dos retornos dos ativos, de maneira a estabelecer-se a melhor composição possível de uma carteira.

Com base nos valores esperados e riscos calculados para as diversas combinações possíveis da carteira, deve o investidor, considerando a sua curva de indiferença, isto é, seu grau de aversão ao risco, eleger a melhor combinação possível de ativos. O objetivo desta seleção é o de atender satisfatoriamente a sua expectativa com relação ao dilema do risco e retorno, presentes nas decisões de investimento.

Risco Sistemático e Beta

Até agora, vimos que o risco total associado a um ativo pode ser decomposto em dois elementos: risco sistemático e risco não sistemático. Assim,

Risco Total = Risco Sistemático + Risco Não Sistemático

Vimos também que o risco não sistemático pode ser quase totalmente eliminado pela diversificação. Como o risco não sistemático pode ser eliminado virtualmente a custo nulo (por meio de diversificação), não pode existir recompensa por assumi-lo. Em outras palavras, o mercado não recompensa riscos desnecessários. Portanto, a recompensa por assumir risco depende apenas do risco sistemático de um investimento. A isto se dá o nome de **princípio do risco sistemático**: *o retorno esperado de um ativo com risco depende apenas do risco sistemático daquele ativo*.

Um corolário óbvio deste princípio é que independentemente de que quanto risco total um ativo tenha, apenas a porção de risco sistemático é relevante para determinar o retorno esperado (e o prêmio por risco) desse ativo.

Risco Sistemático e Beta

Precisamos, então, aprender a medir o *risco sistemático* de diferentes ativos. A medida específica que utilizaremos é denominada **coeficiente beta**, e será usada a letra grega β para representá-lo. Ele nos diz quanto *risco sistemático* um determinado ativo tem em relação a um ativo de mercado. Por definição, um ativo de mercado tem β = 1,0 em relação a ele mesmo. Um ativo com β = 0,50 tem, portanto, metade do risco sistemático de um ativo de mercado. Um ativo com β = 2,0 tem o dobro.

Empresa	Coeficiente Beta (β)	Empresa	Coeficiente Beta (β)
Exxon	0,80	Amazon.com	1,95
Wal-Mart	1,15	Anheuser-Busch	0,60
General Motors	1,30	Bank One Corp.	1,25
Microsoft	1,20	Daimler Chrysler AG	1,25
IBM	1,05	Disney	1,05
Harley-Davidson	1,20	eBay	2,20
Dell Computer	1,35	Intel	1,30
America Online	1,65	Merrill Lynch & Co.	1,85
NIKE, Inc.	0,90	Sempra Energy	0,60
PepsiCo, Inc.	0,70	Xerox	1,25
Qualcomm	1,30	Yahoo! Inc.	2,00

EXEMPLO

Considere as seguintes informações referentes a dois títulos.

	Desvio-padrão (σ)	Beta (β)
Título X	40%	0,50
Título Y	20%	1,50

a. Qual deles tem o maior risco total?
b. Qual tem o maior risco sistemático?
c. Qual tem o maior risco não sistemático?
d. Qual é o ativo com o maior prêmio de risco?

Solução
O título com maior risco total é o X, com σ = 40%.
O título com maior risco sistemático é o Y, com β = 1,50.
Como o risco total é soma do risco sistemático com o risco não sistemático, o título X deve ter um risco não sistemático maior.
De acordo com o princípio do risco sistemático, o título Y deve ter o maior prêmio por risco e o maior retorno esperado, apesar de ter o menor risco total.

Risco, Retorno e o Custo de Capital

- Os investidores exigem um prêmio de risco para tolerarem o risco *diversificável*?
- Não, porque eles mantém um portfólio diversificado para simplesmente eliminar este risco. "Risco diversificável não é precificado".
- Esta estratégia não funciona para risco *não-diversificável*.
- A quantia de risco não diversificável deverá determinar o custo de capital.

Beta de Carteiras

Vimos antes que o risco de uma carteira não tem relação simples com os riscos dos ativos contidos na carteira. O beta de uma carteira, no entanto, pode ser calculado exatamente como o retorno esperado da carteira. Por exemplo, examinando a Tabela anterior, suponha que você aplique metade de seu dinheiro na Wal-Mart e metade na Harley-Davidson. Qual seria o beta desta combinação? Como a Wal-Mart tem um β = 0,95 e a Harley-Davidson um β = 1,20, o beta da carteira, β_P, seria igual a:

$$\beta_P = 0{,}50 \times \beta_{\text{Wal-Mart}} + 0{,}50 \times \beta_{\text{Harley-Davidson}} = 0{,}50 \times 0{,}95 + 0{,}50 \times 1{,}20 = 1{,}075$$

Em geral, se tivéssemos um grande número de ativos na carteira, multiplicaríamos o beta de cada ativo por seu peso na carteira e somaríamos os resultados para obter o beta da carteira.

Exemplo

Suponha que tenhamos os seguintes investimentos:

Título	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta (β)
Título X	$ 1.000	8%	0,80
Título Y	$ 2.000	12%	0,95
Título Z	$ 3.000	15%	1,10
Título T	$ 4.000	18%	1,40

a. Qual é o retorno esperado da carteira?
b. Qual é o beta dessa carteira?
c. Essa carteira tem mais ou menos risco sistemático do que um ativo médio?

Solução

Precisamos em primeiro lugar calcular os pesos na carteira. Assim

Título X: $ 1.000/$ 10.000 = 10%
Título Y: $ 2.000/$ 10.000 = 20%
Título Z: $ 3.000/$ 10.000 = 30%
Título T: $ 4.000/$ 10.000 = 40%

a. O retorno esperado $E(R_{portfólio})$ será:

$E(R_p) = 0,10 \times E(R_X) + 0,20 \times E(R_Y) + 0,30 \times E(R_Z) + 0,40 \times E(R_T) =$
$= 0,10 \times 8\% + 0,20 \times 12\% + 0,30 \times 15\% + 0,40 \times 18\% = 14,9\%$

b. De maneira análoga, o beta da carteira $\beta_{portfólio}$ será:

$\beta_P = 0,10 \times \beta_X + 0,20 \times \beta_Y + 0,30 \times \beta_Z + 0,40 \times \beta_T =$
$= 0,10 \times 0,80 + 0,20 \times 0,95 + 0,30 \times 1,10 + 0,40 \times 1,40 = 1,16$

c. Esta carteira tem um retorno esperado de 14,9% e um beta de 1,16. Como o beta é maior do que 1,0, esta carteira tem risco sistemático <u>superior</u> ao do ativo médio.

Exemplo no Excel

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Título	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta β	Peso na Carteira			
2	Título X	R$ 1000,00	8%	0,8	10%	=B2/SOMA($B$2:$B$5)		
3	Título Y	R$ 2000,00	12%	0,95	20%			
4	Título Z	R$ 3000,00	15%	1,1	30%			
5	Título T	R$ 4000,00	18%	1,4	40%			
6								
7		Retorno Esperado $E(R_{carteira})$	14,90%	=SOMARPRODUTO(E2:E5;C2:C5)				
8		$\beta_{portfolio}$	1,16	=SOMARPRODUTO(E2:E5;D2:D5)				
9								
10								
11								

Exercícios

EXERCÍCIOS de FIXAÇÃO

1. Qual é o princípio do risco sistemático?
2. O que mede o coeficiente beta?
3. Como se calcula o beta de uma carteira?
4. Verdadeiro ou falso: o retorno esperado de um ativo com risco depende do risco total do ativo. Explique.

EXERCÍCIOS

1. Você tem uma carteira com 30% investidos na ação Q, 20% investidos na ação R, 25% na ação S e 25% na ação T. Os betas dessas quatro ações são 1,40, 0,95, 1,20 e 0,80, respectivamente. Qual é o beta da carteira?
2. Você possui uma carteira com pesos iguais no ativo livre de risco e em duas ações. Se uma das ações possui beta de 1,40 e o total da carteira tem o mesmo risco que o mercado, qual deve ser o beta da outra ação de sua carteira?

Exercício 1 no Excel

	A	B	C	D	E	F	G
14							
15	Ação	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta β	Peso na Carteira		
16	Ação Q			1,4	30%		
17	Ação R			0,95	20%		
18	Ação S			1,2	25%		
19	Ação T			0,8	25%		
20							
21		Retorno Esperado $E(R_{carteira})$					
22–23		$\beta_{portfolio}$	1,11	=SOMARPRODUTO(E2:E5;D2:D5)			
24							
25							

Exercício 1 no Excel

CAPM e o Custo de Capital

- A CAPM foi um grande sucesso. Existem muitos aspectos importantes para ela que você discutirá nas aulas de investimentos.
- Os planos de aposentadoria definida são todos projetados baseados na CAPM e suas extensões.
- Mas o que fazer com *finanças corporativas*?
- **CAPM nos diz como encontrar o custo de capital (i.e. o retorno esperado) para uma empresa em particular.**

Retorno Esperado de um Título Individual

- Esta fórmula é chamada de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)

$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i \times (\bar{R}_M - R_F)$$

Retorno esperado de um título	=	Taxa livre de risco	+	Beta do título	×	Prêmio de risco de mercado

- Assuma b_i = 0, daí então o retorno esperado é R_F.
- Assuma b_i = 1, daí então $\bar{R}_i = \bar{R}_M$

A Fórmula para o Beta

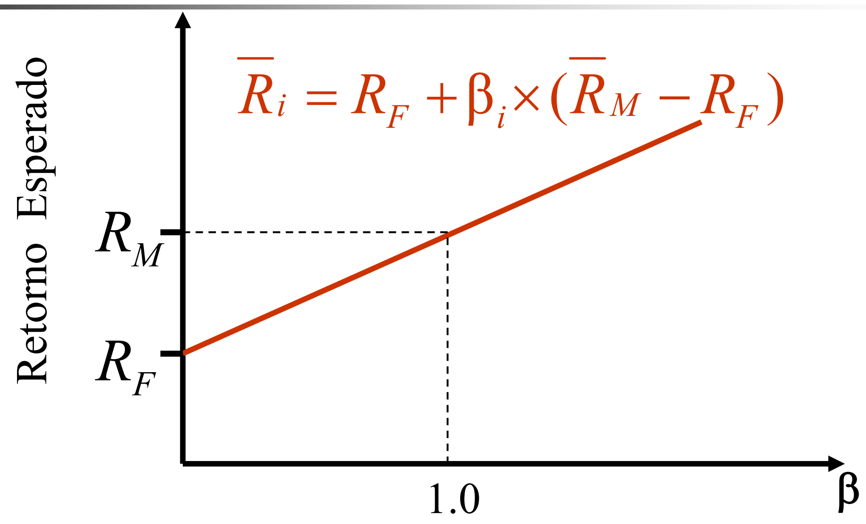
O Beta é uma medida de quão sensível é a ação aos movimentos de mercado. Ele captura a parte *não-diversificável* dorisco.

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

Claramente, sua estimativa do beta dependerá de sua escolha de um substituto para o portfólio de mercado.

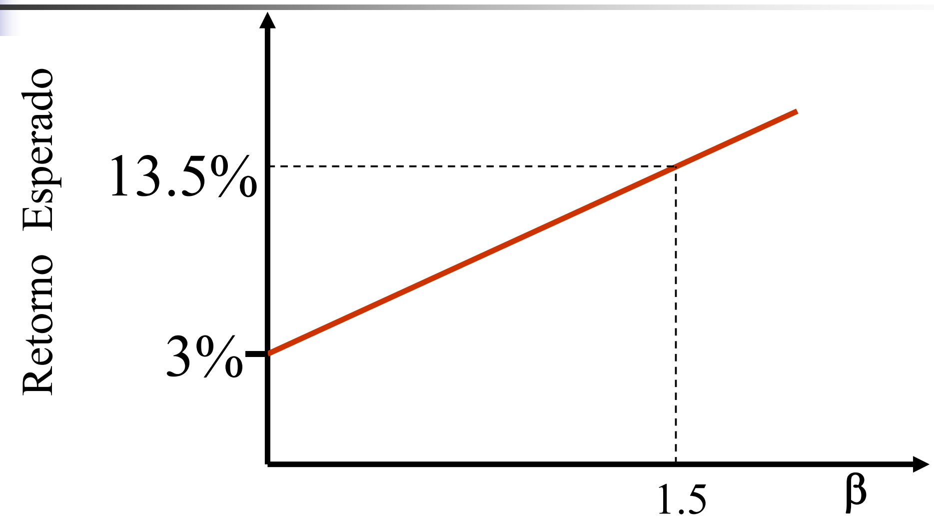
As pessoas geralmente usam o S&P 500. Muitos usam a Taxa SELIC.

Relação Entre Risco & Retorno Esperado



$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i \times (\bar{R}_M - R_F)$$

Relação Entre Risco & Retorno Esperado



$$\beta_i = 1.5 \qquad R_F = 3\% \qquad \overline{R}_M = 10\%$$

$$\overline{R}_i = 3\% + 1.5 \times (10\% - 3\%) = 13.5\%$$

Mais sobre o Beta

O retorno da ação i é dado por:

$$R_i = r_f + \beta_i (R_m - r_f) + \varepsilon_i$$

Assim, a variância da ação é dada por:

$$\mathrm{Var}(\mathrm{R}_i) = \beta^2 \mathrm{Var}(\mathrm{R}_m) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$$

- $\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$ representa a quantia de *risco que pode ser diversificado .*
- $\beta^2\,\mathrm{Var}(R_m)$ representa a quantia de*risco não diversificável*.

Exemplo: Indústria Naval

- As ações no sentido moderno originam-se na indústria naval. Os navios são caros e sujeitos a acidentes em tempo ruim (tempestade).
- **Q:** Qual é a covariância de um tal evento com mercado de ações?

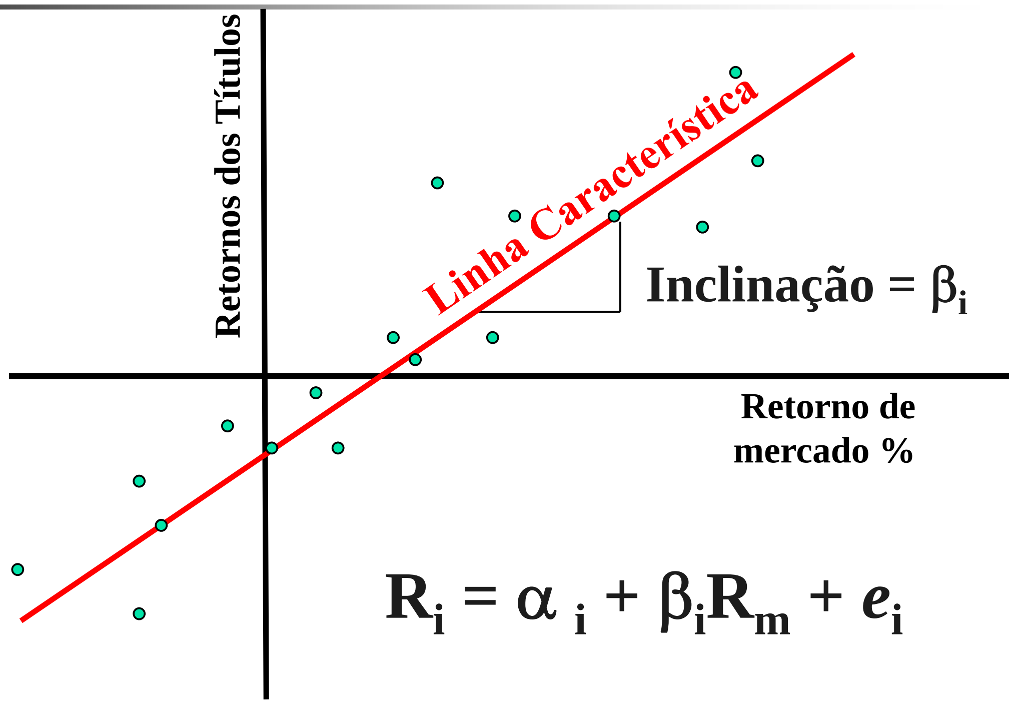
Exemplo: Indústria Naval

- As ações no sentido moderno originam-se na indústria naval. Os navios são caros e sujeitos a acidentes em tempo ruim (tempestade).
- **Q:** Qual é a covariância de um tal evento com mercado de ações?
- **A:** Essencialmente zero.
- Assim, o risco de um naufrágio marítmo é um risco diversificável. Ele não contribui ao custo de capital.

Mais sobre o Beta

- A boa notícia sobre o CAPM é que ele é fácil de se aplicar.
- O Beta pode ser encontrado em jornais e no yahoo.
- Mas podemos também estimar facilmente por nós próprios usando *regressão* (p.ex., no Excel).
  - Para este propósito, baixamos dados de retornos da internet.
  - Geralmente, baixamos 5 anos de retornos mensais para sua ação de interesse e o mercado (S&P 500).

Estimando o β pela regressão



$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Capital Asset Pricing Model - CAPM

- Agora estudaremos que mantendo múltiplas ações pode diversificar uma carteira (portfolio).
- Isto significa que temos de pensar mais sobre o *trade-off* risco e retorno: Alguns, mas não todos, riscos podem ser eliminados
- Somente o risco restante deverá afetar os retornos
- O *Capital Asset Pricing Model* nos diz como isto funciona

Tradeoff Risco-Retorno

Questão: Usamos o desvio padrão como uma medida do risco de ações. Os retornos esperados de uma ação deverão ser uma função do seu desvio padrão?

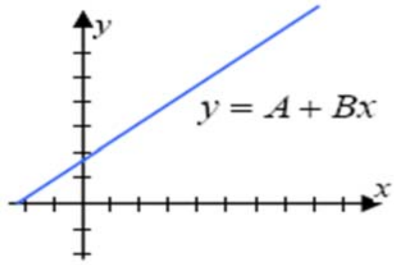
Tradeoff Risco-Retorno

Questão: Usamos o desvio padrão como uma medida do risco de ações. Os retornos esperados de uma ação deverão ser uma função do seu desvio padrão?

Não, porque existem 8.000-10.000 ações, e podemos *reduzir o risco* mantendo um portfólio *diversificado*.

Regressão Linear

- A regressão linear é um método estatístico para se encontrar uma linha reta suave que melhor se ajusta a dois ou mais pares de dados de uma amostra que está sendo analisada. Qualquer linha reta como aquela uma mostrada na Figura 1 tem dois coeficientes específicos que a localizam precisamente num sistema de coordenadas planas: um <u>intercepto</u> em *y* que denominamos de ***A*** e uma <u>inclinação</u> ***B***. Estes coeficientes compõem a equação da linha reta ***y = A + Bx***. É importante mencionar também que a correlação | ***r*** | é sempre 1 quando somente dois pontos forem entrados.
-

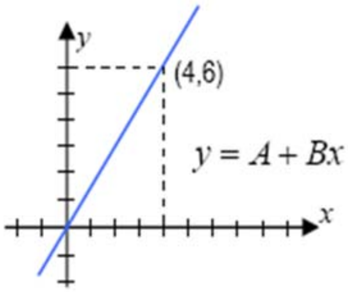


E como fazer na HP-12C?

- Na HP12C, somatórios resultantes de dados estatísticos são apropriados para cálculos de regressão linear. Dadas as coordenadas *y* e *x* de quaisquer dois ou mais pontos pertencentes a uma curva, os coeficientes de regressão linear podem ser facilmente encontrados.

Exemplo #01

- Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura abaixo encontre o *intercepto y* e a *inclinação* para caracterizar a linha reta. Note que a linha cruza o eixo *x* na origem (0,0).



Um dos pontos que pertence à curva é (0,0) e o outro é (4,6). Ambos devem ser entrados para se calcular a equação da linha. Certifique-se de limpar as memórias estatísticas/somatório antes de início do problema.

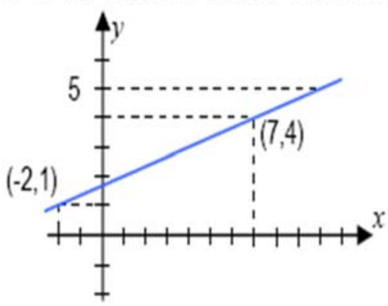
f Σ 0 ENTER 0 Σ+ 6 ENTER 4 Σ+

Agora calcule a inclinação (B) entrando com: (Desde que *A* é zero)

1 g $\hat{y}$,r 1,50

Exemplo #02

- Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura 5, compute o intercepto *y* e a inclinação para caracterizar a linha reta. Daí, então, use o x-previsto para computar a coordenada x relacionada à *y*=5.



Os pares de dados devem ser entrados antes de se computar os coeficientes.

1 ENTER 2 CHS Σ+
4 ENTER 7 Σ+

Como a linha não cruza o eixo x na origem, estimamos y quando x = 0 para achar o **A**, intercepto-y:

0 g $\hat{y}$,r A = 1,67

Para calcular a inclinação, pressione agora:

1 g $\hat{y}$,r x<>y R↓ x<>y - B = 0,33

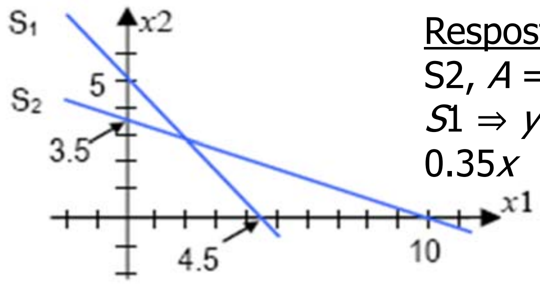
Você está certo de que as memórias estatísticas estavam limpas?

Agora é necessário estimar x para *y*=5.

5 g $\hat{x}$,r x = 10

Exercício

- A programação linear é uma técnica comum usada para resolver problemas de pesquisa operacional por inspeção gráfica. Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura 10, compute o intercepto-*y* e a inclinação para ambas as linhas S1 e S2.



Resposta: Para S1, *A* = 5 e *B* = -1.11. S2, *A* = 3.5 e *B* = -0.35.
S1 ⇒ $y = 5 - 1.11x$ *S2* ⇒ $y = 3.5 - 0.35x$

Onde se aplica a Regressão Linear Simples?

A regressão linear simples é um modelo estatístico usado em várias áreas:

Variável dependente Y	Variável independente X
Renda	Consumo
Gasto com controle de qualidade (R$)	Número de defeitos nos produtos
Memória RAM de computador	Tempo de resposta do sistema
Área construída do imóvel (m^2)	Preço do imóvel

Em Economia

Em Economia, a demanda por x unidades de um produto ao preço unitário de p unidades monetárias (u.m.) é dada por uma equação envolvendo essas variáveis, chamada **equação de demanda**. Também a oferta de x unidades de um produto ao preço unitário de p (u.m.) é dada por uma equação, chamada **equação de oferta**.

Considere as tabelas abaixo:

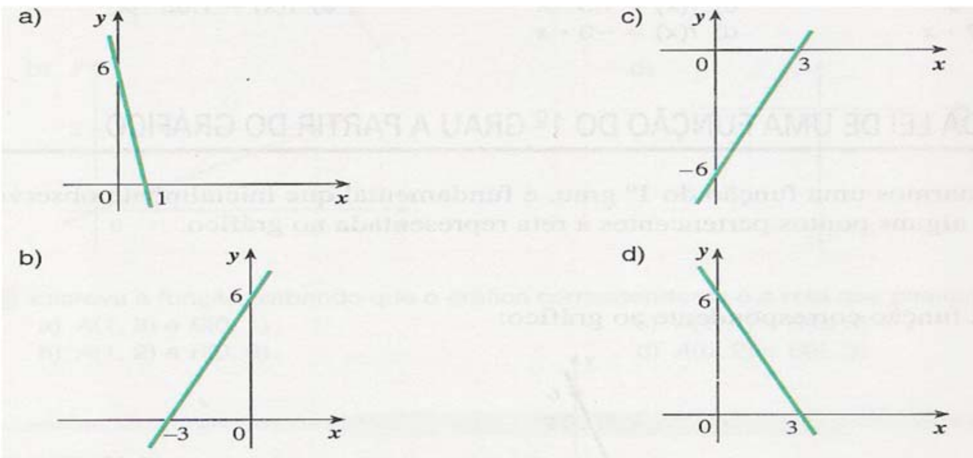
unidades	Preço
0	6,00
1	5,50
2	5,00
3	4,50
4	4,00
5	3,50
6	3,00
7	2,50
8	2,00
9	1,50

unidades	Preço
0	1,00
1	3,00
2	5,00
3	7,00
4	9,00
5	11,00
6	13,00
7	15,00
8	17,00
9	19,00

a. Encontre as equações de demanda e de oferta.
b. Construa os gráficos de demanda e de oferta.
c. O ponto de equilíbrio é atingido quando forem vendidas quantas unidades? A que preço?

Exercício de Reconhecimento

O gráfico da função y = -2x + 6 para x ∈ |R é:



Exercício de Vestibulares

1. Na produção de peças, uma industria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida . Sendo x o número de unidades produzidas:
   a) escreva a lei da função que fornece o custo total de peças;
   b) calcule o custo de 100 unidades;
2. (FGV-SP) Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que C = 200+0,8x . Podemos então afirmar que :
   (A) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500,
   (B) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.
   (C) se a renda aumenta em 1000, o consumo aumenta em 800.
   (D) se a renda diminui em 1000, o consumo diminui em 2800.
3. (VUNESP) Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil, via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cobra R$ 1,37 pela primeira pagina e R$ 0,67 por pagina que segue, completa ou não.Qual o número mínimo de mensagens para que o preço ultrapasse o valor de R$ 10,00 é de:
   (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

Praticando

Construir a equação de regressão, com ela fazer um gráfico e determinar a altura do filho de um pai com 164 cm, para a distribuição de altura dos pais (X) e a altura dos filhos (y):

x	y
164	166
166	166
169	171
169	166
171	171
173	171
173	178
176	173
178	178

Resp: y = 22 + 0,872 x

Praticando na HP-12C

f Σ
166 ENTER 164 Σ+
166 ENTER 166 Σ+
171 ENTER 169 Σ+
166 ENTER 169 Σ+
171 ENTER 171 Σ+
171 ENTER 173 Σ+
178 ENTER 173 Σ+
173 ENTER 176 Σ+
178 ENTER 178 Σ+

Com as memórias estatísticas carregadas, vamos encontrar a equação da reta de regressão:
0 g y,r ....22.007 intercepção
ENTER 1 g y,r x<>y R↓ x<>y - ....0.8720 Inclinação

A equação da reta de regressão: $\hat{Y}$ = 0,8720 x + 22.007

Praticando no Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
14											
15	X	Y									
16	164	166									
17	166	166	Intercepto	22,007	=INTERCEPÇÃO(B16:B24;A16:A24)						
18	169	171									
19	169	166	Inclinação	0,872	=INCLINAÇÃO(B16:B24;A16:A24)						
20	171	171									
21	173	171	Equação	y=	0,872	x +	22,007				
22	173	178									
23	176	173									
24	178	178									
25											
26											

Usando a Ferramenta de Análise Regressão do Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	RESUMO DOS RESULTADOS								
2									
3	*Estatística de regressão*								
4	R múltiplo	0,839583387							
5	R-Quadrado	0,704900264							
6	R-quadrado ajustado	0,662743158							
7	Erro padrão	2,730773425							
8	Observações	9							
9									
10	ANOVA								
11		*gl*	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*			
12	Regressão	1	124,6890244	124,6890244	16,7207938	0,004636173			
13	Resíduo	7	52,1998645	7,4571235					
14	Total	8	176,8888889						
15									
16		*Coeficientes*	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*	*Inferior 95,0%*	*Superior 95,0%*
17	Interseção	22,00745257	36,47498588	0,603357398	0,56530055	-64,24218362	108,2570888	-64,24218362	108,2570888
18	Variável X 1	0,87195122	0,213237579	4,089106724	0,004636173	0,367724468	1,376177971	0,367724468	1,376177971
19									
20									

Gráfico da Regressão Linear

	A	B	C	D	E
15	X	Y			
16	164	166			
17	166	166	Intercepto	22,007	=INTERCEPÇÃO(B16:B24;A16:A24)
18	169	171			
19	169	166	Inclinação	0,872	=INCLINAÇÃO(B16:B24;A16:A24)
20	171	171			
21	173	171	Equação	y=	0,872 x + 22,007
22	173	178			
23	176	173			
24	178	178			

Tabela Auxiliar

X	Ŷ
164	165,0074526
166	166,751355
169	169,3672087
169	169,3672087
171	171,1111111
173	172,8550136
173	172,8550136
176	175,4708672
178	177,2147696

Esta é a reta que melhor se ajusta aos Y dados!

Praticando...

Chama-se *coeficiente de determinação* R^2 (R-quadrado) a razão:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y} - \overline{y})^2}{\sum(y - \overline{y})^2}$$

$$R^2 = \frac{124{,}7037}{176{,}8889} = 0{,}7049 \text{ ou } 70{,}49\%$$

O coeficiente de determinação é uma medida descritiva da proporção da variação de Y que pode ser explicada por x. Segundo o modelo, temos $R^2 \cong 70\%$ dentre os 9 indivíduos estudados, i.é, 70% da variação das alturas é determinada pelos pais e 30% por outros fatores.

Este valor pode está mostrado na regressão do excel em azul

x	y	$(y-y_{méd})^2$	$(\hat{y} - y_{méd})^2$
164	166	26,1235	37,1626
166	166	26,1235	18,9409
169	171	0,0123	3,0141
169	166	26,1235	3,0141
171	171	0,0123	0,0001
173	171	0,0123	3,0691
173	178	47,4568	3,0691
176	173	3,5679	19,0785
178	178	47,4568	37,3552

Coeficiente de Determinação na HP-12C

Na HP-12C podemos encontrar facilmente o Coeficiente de Determinação R^2 :

Com as memórias estatísticas ainda carregadas, digite:

1 g $\hat{y}$,r x<>y ENTER 2 Y^x .... 0.7049 ou 70.49%

Repetindo: praticamente 70% das alturas dos filhos são EXPLICADAS pelas alturas dos pais. O restante, 30%, das alturas são explicadas por outros fatores.

Exemplo Completo.

O diretor de vendas de uma rede de varejo nacional necessita analisar a relação entre o investimento em propaganda e as vendas da empresa. O objetivo é dispor de uma equação matemática que permita realizar projeções de vendas a partir de investimentos em propaganda. O departamento de vendas preparou a tabela abaixo com as vendas em milhões e os investimentos em propaganda em milhões dos últimos dez anos. Definir um modelo que represente a relação entre as duas variáveis ou amostras.

Propaganda	30	21	35	42	37	20	8	17	35	25
Vendas	430	335	520	490	470	210	195	270	400	480

Primeiramente inserir todos as despesas de propaganda e as vendas na HP-12C utilizando a tecla Σ+, após limpar os registros estatísticos com f Σ.

Propaganda	30	21	35	42	37	20	8	17	35	25
Vendas	430	335	520	490	470	210	195	270	400	480

Qual a equação de regressão de Vendas (Y) versus Propaganda (X)?

Resp: Y = 117,07 + 9,74 X

Qual o coeficiente de correlação entre as vendas e a propaganda?

Resp: r_{XY} = 0,859366

Qual as médias de vendas e de propaganda?

Vendas $Y_{médio}$=380,00 Propaganda $X_{médio}$= 27

Qual os desvios padrões de vendas e de propaganda?

Vendas s_Y = 120,16 Propaganda s_X = 10,60

Qual o coeficiente de determinação? O que ele significa

Resp: r^2 = 0,738510. Significa que 74% das variações das vendas são explicadas pelas variações em propaganda.

Fazer um gráfico da reta de regressão.

Projetar as vendas para investimentos de 20, 30 e 45 milhões em propaganda.

Resp: 311,83; 409,21; 555,29 milhões respectivamente.

Exercícios do listão

Exercício 8

Considere que ao longo dos últimos 10 anos, se verificaram os seguintes retornos:

Ano	Retorno Ações Ordinárias	Retorno Letras do Tesouro
-10	35,0%	11,2%
-9	-8,2%	12,5%
-8	4,5%	10,5%
-7	18,0%	8,2%
-6	22,5%	9,5%
-5	6,5%	7,7%
-4	33,2%	6,9%
-3	18,9%	7,2%
-2	4,6%	6,5%
Último	13,8%	6,3%

a) Calcule o prêmio de risco verificado em cada um desses anos para os investimentos acionistas.
b) Calcule o prêmio de risco médio verificado.
c) Admitindo que o prêmio de risco esperado anual era de 6%, diga qual foi o retorno anormal verificado em cada um dos anos. E qual foi o retorno anormal médio?

Exercícios do listão

Exercício 9

A probabilidade de uma economia vir a ter um crescimento moderado no próximo ano é de 0,6. A probabilidade de recessão é de 0,2. A probabilidade de rápida expansão é de 0,2. Se a economia cair em recessão espera que a sua carteira de investimentos mobiliários tenha um retorno de 5%. Com crescimento moderado espera 8% E com rápida expansão espera 15%.

a) Qual o retorno que espera obter no próximo ano?
b) Qual o risco respectivo, medido pelo desvio padrão dos retornos?

Exercício 10

Suponha que possui um ativo com um retorno esperado de 12% e um desvio padrão de 20%. Se os retornos forem normalmente distribuídos, a probabilidade (em termos aproximados) de receber um retorno superior a 32% é de cerca de:

a) 5%.
b) 16%.
c) 33%.
d) 67%.

Estimativas de β para Ações Selecionadas

Ação	Beta
Bank of America	1.55
Borland Int'l	2.35
Travelers, Inc.	1.65
Du Pont	1.00
Kimberly-Clark Corp.	0.90
Microsoft	1.05
Green Mountain Power	0.55
Homestake Mining	0.20
Oracle, Inc.	0.49

Resumo e Conclusões

- Esta aula expõe os princípios da toria moderna de portfólio.
- O retorno esperado e a variância de um portfolio de dois títulos *A* e *B* são dados por

$$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B)$$

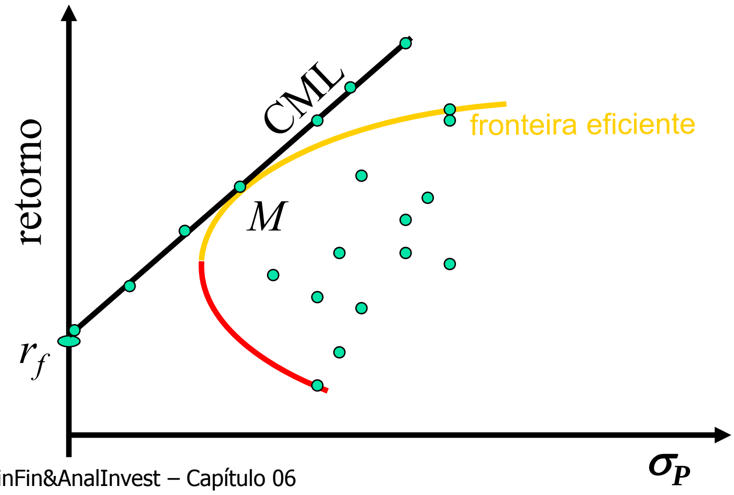
$$\sigma_P^2 = (w_A\sigma_A)^2 + (w_B\sigma_B)^2 + 2(w_B\sigma_B)(w_A\sigma_A)\rho_{AB}$$

- Variando w_A, pode-se traçar o conjunto eficiente de portfólios. Plotando o conjunto eficiente para o caso de dois ativos como uma curva, aponta que o grau de curvatura reflete o efeito da diversificação: quanto mais baixa a correlação entre os dois títulos, maior a diversificação.
- A mesma forma geral mantém-se no mundo de muitos ativos.

Resumo e Conclusões

O conjunto eficiente de ativos arriscados pode ser combinado com tomar emprestado e emprestar sem risco. Neste caso, um investidor racional sempre escolherá manter o portfólio de títulos arriscados representado pelo portfólio de mercado.

Então tomando emprestado ou emprestando, o investidor seleciona um ponto ao longo da CML.



Resumo e Conclusões

- A contribuição de um título para o risco de um portfólio bem comportado é proporcional à covariância do retorno dos títulos com o retorno de mercado. Esta contribuição é chamada de beta.

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

- O CAPM estabelece que o retorno esperado de um título é está positivamente relacionado ao beta do título:

$$\overline{R}_i = R_F + \beta_i \times (\overline{R}_M - R_F)$$

Média e Desvio Padrão de Duas Variáveis

- Um recenseador de terrenos quer calcular a relação entre a área construída e a área do terreno de oito casas localizadas na sua vizinhança. Inicialmente ele precisa saber a média e o desvio padrão para ambos parâmetros. Suas medidas permitiram-lhe construir o seguinte quadro:

Área do Terreno (m^2)	Área Construída (m^2)	Área do Terreno (m^2)	Área Construída(m^2)
12000	3120	9000	2080
10000	2560	10000	2700
11000	2920	13000	3280
14000	3300	12000	3080

- Certifique-se em apagar as memórias estatísticas/somatório antes de iniciar o problema. f Σ
- **3120 ENTER 12000 Σ+**
- **2560 ENTER 10000 Σ+**
- **2920 ENTER 11000 Σ+**
- **3300 ENTER 14000 Σ+**
- **2080 ENTER 9000 Σ+**
- **2700 ENTER 10000 Σ+**
- **3280 ENTER 13000 Σ+**
- **3080 ENTER 12000 Σ+**

Para calcular a média da de terreno: **g** $\bar{x}$. Área de terreno média: 11.375 m^2
Agora pressionando **x<>y** temos área média de construção: 2.880 m^2.
Para calcular o desvio padrão: **g s …**desvio padrão para a área de terreno: 1.685,02 m^2.
Pressionando **x<>y** temos o desvio padrão para a área construída: 415,83 m^2.

30/07/2012 232

Exercício

Vendedor	Horas por Semana	Vendas por Mês
1	32	R$ 1.700.000,00
2	40	R$ 2.500.000,00
3	45	R$ 2.600.000,00
4	40	R$ 2.000.000,00
5	38	R$ 2.100.000,00
6	50	R$ 2.800.000,00
7	35	R$ 1.500.000,00

Uma pesquisa feita com sete vendedores de sua empresa revelou os dados da tabela dada a seguir. Quantas horas um vendedor trabalha, em média, por semana? Quanto ele vende, em média, por mês? Qual o desvio padrão das vendas e das horas trabalhadas por semana?

Resposta: Média das vendas é R$ 2.171.428,57.
Média das horas de trabalho por semana é 40 h.
Desvio padrão das vendas: R$ 482.059,08
Desvio padrão das horas trabalhadas: 6,03 h.