CAPÍTULO 6

Análise de Investimentos com Risco No Excel e na HP-12C

FONTE: Beard, William Holbrook (1823–1900). New York Historical Society/The Bridgeman Art Library International, Ltd.

Riscos, Custo de Capital, CAPM e CMPC

Uma das responsabilidades dos administradores financeiros é estimar o valor de propostas de investimentos, como fizemos no nosso capítulo anterior sobre orçamento de capital. Ocorre que o retorno que exigimos de uma proposta de investimento NÃO FINANCEIRO precisa ser, no mínimo, tão alto quanto o que podemos obter comprando ativos FINANCEIROS de risco semelhante. Também, em orçamento de capital, não há projetos livres de risco. Isto porque o futuro é incerto e daí, também, os fluxos de caixa futuros gerados pelo projeto. Estes fluxos de caixa, inesperadamente, podem aumentar ou diminuir. A taxa pela qual os futuros fluxos de caixa foram investidos pode não permanecer a mesma. Existem muitos fatores que podem reduzir os fluxos de caixa esperados: perda de participação no mercado, aumento no custo das mercadorias vendidas, novas regulamentações ambientais, aumento no custo do financiamento. Como sempre há risco no orçamento de capital, a principal tarefa dos analistas de investimentos é selecionar projetos sob condições de incerteza.

O que é retorno elevado? O que é retorno baixo? Mais genericamente, qual é o retorno que devemos esperar de ATIVOS FINANCEIROS, e qual é o risco desses investimentos? Essa perspectiva é essencial para entender como analisar e avaliar projetos de investimentos e o que vamos fazer agora é encarar de frente o assunto de risco em projetos, inicialmente em ativos financeiros.

Risco, para a maioria de nós, refere-se à probabilidade que nos jogos de sorte da vida se conseguir um resultado que nós não gostaríamos que acontecesse. Por exemplo, o risco de dirigir um carro muito rápido é conseguirmos uma multa por excesso de velocidade, ou pior ainda, sofrermos um acidente. O dicionário *Webster*, de fato, define o risco como “exposição ao perigo ou ao azar”. Assim, risco é percebido quase que completamente em termos negativos. Se você pratica pára-quedismo, você está arriscando sua vida – o pára-quedismo é arriscado. Se você aposta em cavalos, está arriscando seu dinheiro. Se você investe em ações especulativas (ou, para dizer a verdade, em qualquer ação), está assumindo um risco na esperança de obter um retorno apreciável.

Em finanças, nossa definição de risco é diferente e mais ampla. Risco, como se vê, refere-se à probabilidade de recebermos um retorno sobre um investimento que seja diferente do retorno esperado. Assim, o risco inclui não somente os resultados ruins, isto é, retornos que estão abaixo daqueles esperados, mas também resultados bons, isto é, retornos que são maiores que os esperados. De fato, podemos nos referir aos primeiros como risco do lado inferior, os últimos como do lado superior; mas consideraremos ambos quando medimos o risco. De fato, o espírito da nossa definição de risco em finanças é capturado melhor pelos símbolos Chineses para o risco, que estão reproduzidos abaixo:

危機

O primeiro símbolo é o símbolo do “perigo”, enquanto o segundo é o símbolo da “oportunidade”, tornando o risco uma mistura de *perigo* e *oportunidade*. Ele ilustra muito claramente o *tradeoff* que cada investidor e negócio têm de fazer – entre o maior prêmio que vem da oportunidade e o maior risco que tem nascido como uma conseqüência do perigo.

CAPRICHOS DOS DEUSES?

O que é que distingue as centenas de anos de história daquilo que pensamos como tempos modernos? A resposta vai além do progresso da ciência, tecnologia, capitalismo e democracia.

O passado distante estava repleto de brilhantes cientistas, matemáticos, inventores, tecnólogos e filósofos políticos. Centenas de anos antes do nascimento de Cristo, os céus tinham sido mapeados, a grande biblioteca de Alexandria construída e a geometria de Euclides ensinada. Demanda por inovações tecnológicas nas guerras era tão insaciável quanto é hoje em dia.

Carvão, óleo, ferro e cobre, estiveram a serviço dos seres humanos por milênios, e viajar e comunicar estão marcados nos registros muito do início da civilização.

A idéia revolucionária que define o limite entre os tempos modernos e o passado é o domínio do risco: a noção de que o futuro é mais que um capricho dos deuses e que o homem e a mulher não são passivos ante a natureza. Até os seres humanos descobrirem uma maneira de atravessar este limite, o futuro foi um espelho do passado ou o domínio turvo dos santuários e profetas que mantiveram um monopólio sobre o conhecimento de eventos antecipados.

Peter Bernstein em *Against The Gods, the Remarkable Story of Risk*, John Wiley & Sons (Outubro 1996)

Muito deste capítulo pode ser visto como uma tentativa de sugerir um modelo que melhor meça o "perigo" em qualquer investimento e daí então tentar converter isto em "oportunidade" que precisaríamos para compensar o perigo. Em termos financeiros, chamamos o perigo de "risco" e a oportunidade de "retorno esperado".

Alguns riscos afetam diretamente tanto os administradores financeiros como os acionistas. Na tabela abaixo são descritas resumidamente as fontes comuns de risco para as empresas e seus acionistas.

Fontes populares de risco para administradores financeiros e acionistas	
Fonte de risco	Descrição
Riscos específicos da empresa	
Risco Operacional	A possibilidade de que a empresa não seja capaz de cobrir seus custos de operação. Seu nível é determinado pela estabilidade das receitas da empresa (fixos) e pela estrutura de seus custos operacionais (variáveis)
Risco Financeiro	A possibilidade que a empresa não seja capaz de saldar suas obrigações financeiras. Seu nível é determinado pela previsibilidade dos fluxos de caixa operacionais da empresa e suas obrigações financeiras com encargos fixos.
Riscos específicos dos acionistas	
Risco de taxa de juros	A possibilidade de que as variações das taxas de juros afetem negativamente o valor de um investimento. A maioria dos investimentos perde valor quando a taxa de juros sobe e ganha valor quando ela cai.
Risco de liquidez	A possibilidade de que um ativo não possa ser liquidado com facilidade a um preço razoável. A liquidez é significativamente afetada pelo porte e pela profundidade do mercado no qual o ativo é costumeiramente negociado.
Risco de mercado	A possibilidade de que o valor de um ativo caia por causa de fatores de mercado independentes do ativo (como eventos econômicos, políticos e sociais). Em geral, quanto mais o valor do ativo reage ao comportamento do mercado, maior é seu risco; quanto menos reage, menor é seu risco.
Riscos para empresas e acionistas	
Risco de evento	A possibilidade de que um evento totalmente inesperado exerça efeito significativo sobre o valor da empresa ou um ativo específico. Esses eventos raros, como a decisão do governo de mandar recolher do mercado um medicamento popular, costumam afetar somente um pequeno grupo de empresas ou ativos.
Risco de câmbio	A exposição dos fluxos de caixa esperados para o futuro a flutuações das taxas de câmbio. Quanto maior a possibilidade de flutuações cambiais indesejáveis, maior o risco dos fluxos de caixa e, portanto, menor o valor da empresa ou do ativo.
Risco de poder aquisitivo	A possibilidade de que a variação dos níveis gerais de preços, causadas por inflação ou deflação na economia, afete desfavoravelmente os fluxos de caixa e o valor da empresa ou de um ativo. Normalmente, as empresas ou os ativos com fluxos de caixa que variam com os níveis gerais de preços apresentam risco mais baixo de variação de poder aquisitivo. Ao contrário, se os fluxos de caixa não variarem de acordo com os níveis gerais de preços, oferecem maior risco de poder aquisitivo.
Risco de tributação	A possibilidade de que mudanças adversas na legislação tributária venham a ocorrer. Empresas e ativos cujos valores são sensíveis a essas mudanças implicam maior risco.

Extraído do livro Princípios de Administração Financeira do Gitman, L.J. (p. 185 – Ed. Pearson – 10ª Ed.)

Risco do Capital Próprio e Retorno Esperado

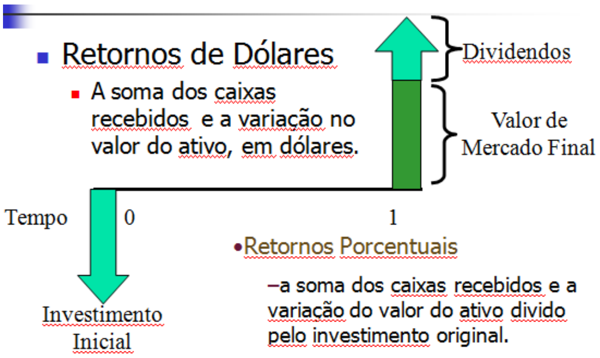
Para demonstrar como o risco é visto em finanças corporativas, apresentaremos a análise de risco em três passos. *Primeiro*, definiremos o risco em termos da distribuição dos retornos reais ao redor de um retorno esperado. *Segundo*, diferenciaremos entre risco que é específico para um ou uns poucos investimentos e o risco que afetam a área alvo dos investimentos. Arguiremos que num mercado onde os investidores marginais são bem diversificados, é somente o último risco, o chamado **risco de mercado** que será recompensado. *Terceiro*, observaremos que modelos alternativos para medidas do risco e dos retornos esperados os acompanham.

I. Definindo o Risco

Investidores que compram ativos esperam ganhar retornos durante o horizonte de tempo que eles mantiverem o ativo. O seu ganho (ou perda) no investimento será denominado *retorno sobre o investimento*. Frequentemente, esse retorno terá dois componentes. Em primeiro lugar, você receberá algum dinheiro enquanto possuir o ativo. Isso é denominado **rendimento corrente**. Em segundo lugar, o valor dos ativos adquiridos geralmente variará. Nesse caso, você terá um ganho ou uma perda de capital em seu investimento.

Seus retornos reais durante este *holding period*[1] podem ser muito diferentes dos retornos esperados e é está diferença entre o retorno real e esperado que é a fonte do risco.

Para ilustrar graficamente, temos:



Portanto, a porcentagem do retorno sobre o investimento chamada HPR será:

$$HPR = \frac{Ganho\ de\ Capital + Dividendos}{Investimento\ Inicial}$$

EXEMPLO

Suponhamos que você tenha tido a sorte de comprar ações da *General Electric* no início de 1999, quando cada ação custava aproximadamente $ 102. No final do ano, o valor desse investimento havia valorizado para $ 155, dando um ganho de capital de $ 155 - $ 102 = $ 53. Além disso, em 1999 a *General Electric* pagou dividendo (*rendimento corrente*) de $ 1,46 por ação.

$$HPR = \frac{53 + 1{,}46}{102} = 0{,}534\ ou\ 53{,}4\%$$

Não se esqueça da inflação. Para isso resolva o exercício de fixação:

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

Suponhamos que você tenha comprado uma obrigação (*bonds*) por $ 1.020, com vencimento em 15 anos, pagando um cupom anual de $ 80. Um ano depois, as taxas de juros caíram, e o preço da obrigação aumentou para $ 1.050. Quais são suas taxas de retorno nominal e real? Suponha que a taxa de inflação tenha sido 4% neste ano. **Resp:** 6,5%

[1] Em finanças, ***holding period return*** (HPR) é uma medida do retorno sobre um ativo ou carteira. É uma das mais simples medidas da performance do investimento.
HPR é a porcentagem pela qual o valor de uma carteira (ou ativo) cresceu num período particular. Ele é a soma do lucro líquido (rendimento corrente) e ganho de capital dividido pelo valor no início do período (valor do ativo no início do período).

DADO: $1 + \text{taxa de retorno real anual} = \frac{1+\text{taxa de retorno nominal anual}}{1+\text{taxa de inflação anual}}$

EXERCÍCIOS

1. Mr. X comprou uma ação por R$ 15,60. Passada uma hora vendeu-a por R$15,80. Qual o retorno porcentual obtido nessa hora sem considerar os dividendos. Fazer direto na HP-12C.

2. Suponha que um ano atrás Mr X. comprou 100 ações da Companhia Inventada, SA por R$ 25. O dividendo pago por ação foi de 20 centavos. Suponha que acaba de vender a sua ação por R$ 30 (ex-dividendo). Qual foi o seu retorno? Qual o ganho de capital?

3. No início do ano uma ação está sendo vendida a $ 37. Se você comprar um lote de 100 ações e, durante o ano, a ação pague um dividendo de $ 1,85 e, no final do ano, o seu valor aumente para $ 40,33. Pede-se:
   a. Qual o rendimento corrente de dividendos? `Resp: $ 185 e`
   b. Qual o ganho de capital? `Resp: $ 333`
   c. Se o preço da ação cair para $ 34,78, responda os itens anteriores. `Resp: $ 185 e -$ 222`
   d. Quais os retornos monetários totais nos dois casos? `Resp: $ 518 e -$ 37`

4. Suponha que você tivesse comprado ações a $ 25. Ao final do ano, o preço é $ 35. Ao longo do ano, você recebeu um dividendo por ação de $ 2. Qual é a taxa de dividendo? Qual é a taxa de ganho de capital? Qual é o retorno percentual? Se você tivesse aplicado um total de $ 1.000, quanto teria no final do ano? `Resp: 8%; 40%; 48%; 480`

5. Em 2 de janeiro você comprou ações de uma determinada companhia a R$ 33,00 cada uma e, um ano depois, vendeu-as por R$ 38,00 cada uma. Durante o ano, você recebeu um dividendo em dinheiro de R$ 1,50 por ação. Calcule:
   a. o ganho de capital por ação. `Resp: R$ 5,00/ação`
   b. o retorno total por ação em R$. `Resp: R$ 6,50`
   c. A taxa de retorno obtida no seu investimento.? `Resp: 19,7%`

6. No início do ano passado você investiu R$ 48.000,00 em 4.000 ações da Cia. Céu Azul Transportes Aéreos S.A.. Durante o ano, a companhia pagou dividendos de R$ 1,20 por ação. No final do ano, você vendeu as 4.000 ações a R$ 14,61.
   a. Calcule o retorno total em R$ obtido em seu investimento. `Resp: R$ 15.240,00`
   b. Identifique o quanto do retorno total deve-se ao ganho de capital e o quanto se deve ao rendimento obtido. `Resp: R$ 10.440,00 são ganhos de capital e R$ 4.800,00 são os dividendos recebidos`

Preferências em relação ao risco

As atitudes em relação a risco diferem entre os administradores (e as empresas). Por isso, é importante delimitar um nível geralmente aceitável de risco.

- Para o administrador **indiferente ao risco**, o retorno exigido não varia quando o nível de risco vai de x_1 para x_2. Essencialmente, não haveria nenhuma variação de retorno exigida em razão do aumento de risco. É claro que essa atitude não faz sentido em quase nenhuma situação empresarial.
- Para o administrador **avesso ao risco**, o retorno exigido aumenta quando o risco se eleva. Como esse administrador tem medo do risco, exige um retorno esperado mais alto para compensar o risco mais elevado.
- Para o administrador **propenso ao risco**, o retorno exigido cai se o risco aumenta. Teoricamente, como gosta de correr riscos, esse tipo de administrador está disposto a abrir mão de algum retorno para assumir maiores riscos. Entretanto, esse comportamento não tenderia a beneficiar a empresa.

Em sua maioria, os administradores são avessos ao risco. Para certo aumento de risco, exigem aumento de retorno. Geralmente, tendem a serem conservadores, e não agressivos, ao assumir riscos em nome de suas empresas. Portanto, neste livro será feita a suposição de que o administrador financeiro tem aversão a risco e exige retornos maiores para correr riscos mais altos.

QUESTÕES CONCEITUAIS

1. Quais são os dois componentes do retorno total? Resp: Dividendos e Ganhos
2. Por que os ganhos ou perdas de capital não realizados são incluídos no cálculo de retornos? Resp: Pois poderão ser convertidos em caixa se desejarmos.
3. Qual é a diferença entre retorno monetário e porcentual? Por que os retornos percentuais são mais convenientes? Resp: Não dependem da magnitude do investimento.
4. O que é *risco*, no contexto da tomada de decisões financeiras? Resp: *Risco* é definido como a chance de perda financeira, quando medido pela variabilidade dos retornos esperados associado com um dado ativo. Um tomador de decisão deverá avaliar um investimento medindo a chance de perda, ou risco, e comparando o risco esperado ao retorno esperado. Alguns ativos são considerados livres de risco; os exemplos mais comuns são *U. S. Treasury* em circulação.
5. Defina *retorno* e descreva como calcular a taxa de retorno de um investimento. Resp:O *retorno sobre um investimento* (ganho ou perda total) é a variação do valor mais qualquer distribuições de caixa durante um período de tempo definido. É expresso como uma porcentagem do investimento no início do período. A fórmula é:

$$\text{Retorno} = \frac{[(\text{valor final} - \text{valor inicial}) + \text{distribuição de caixa}]}{\text{valor inicial}}$$

   Retorno realizado exige que o ativo seja comprado e vendido durante o período de tempo em que o retorno é medido. *Retorno não realizado* é o retorno que poderia ter sido realizado se o ativo tivesse sido comprado e vendido durante o período de tempo em que o retorno foi medido.

6. Compare as seguintes atitudes em relação ao risco: (a) aversão, (b) indiferença, e (c) propensão. Qual delas é mais comum entre os administradores financeiros? Resp:
   a) O gestor financeiro ***avesso ao risco*** exige um aumento no retorno para um dado aumento no risco.
   b) O gestor ***indiferente ao risco*** exige nenhuma variação no retorno para um aumento no risco.
   c) O gestor ***propenso ao risco*** aceita uma diminuição do retorno para um dado aumento no risco.

   A maioria dos gestores financeiros é avessa ao risco.

RETROSPECTIVA HISTÓRICA DO MERCADO DE CAPITAIS

Faremos agora uma análise estatística numa série histórica de dados de retornos e suas taxas de retorno dos principais ativos do mercado financeiro.

Esta análise é importante, pois, com ela poderemos traçar as expectativas futuras.

É claro que o passado não determina o futuro, mas indica alguma chance ou probabilidade de ocorrência. Caso contrário não tem jeito de se fazer prognósticos.

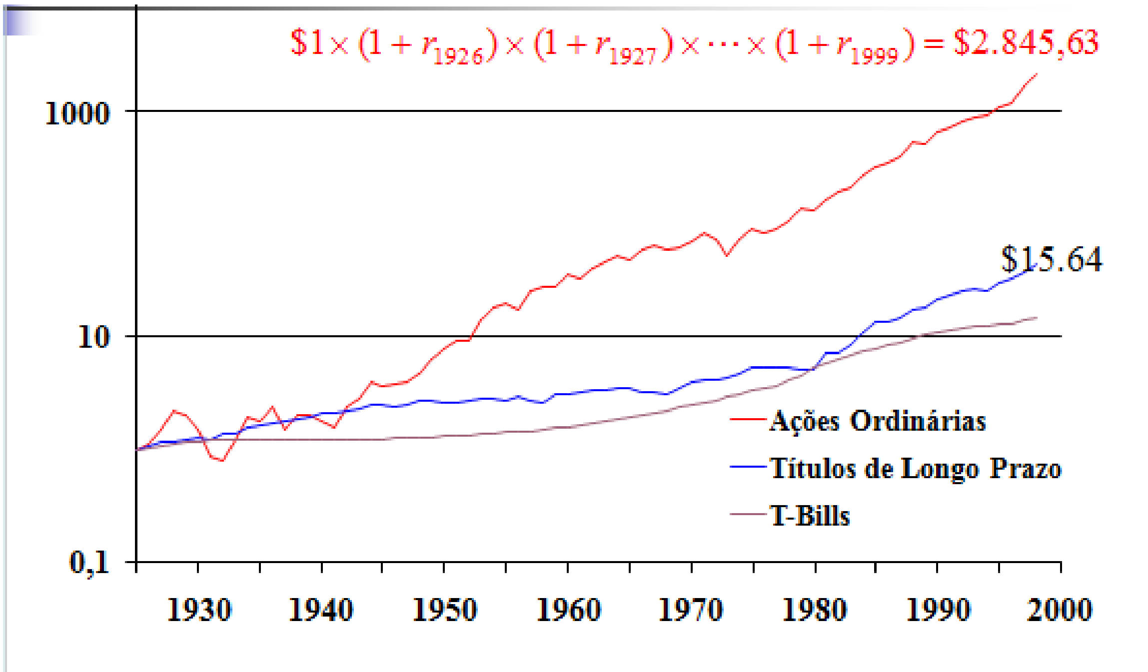
Nesta primeira análise temos à disposição os dados coletados nos diversos anos e vamos fazer uma análise desses dados. Como a análise será estatística, obviamente, usaremos a Estatística Descritiva.

Numa segunda etapa, que para nós é a mais importante, usaremos probabilidades para estimarmos os resultados possíveis. Lembrando que nestas projeções existirão sempre margens de erros que também deverão ser determinadas.

Voltemos, portanto, nossa atenção ao passado.

Histórico das Taxas de Retorno

Se você tivesse investido $ 1 em 1926, em 2000, você teria[2]:



Fonte © *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado[3] por Roger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

Os retornos de investimentos variam no tempo e entre tipos distintos de investimentos. Calculando as médias de retornos históricos em períodos longos é possível eliminar o impacto do risco de mercado e de outros tipos de risco. Isso permite ao tomador de decisões financeiras focalizar sua atenção nas diferenças de retorno atribuíveis principalmente aos tipos de investimento.

O gráfico mostra diferenças significativas entre as taxas anuais médias de retorno dos vários tipos de ações, obrigações (títulos de longo prazo) e letras (*T-Bills*). Mais adiante, neste capítulo, veremos como as diferenças de retorno podem ser relacionadas a diferenças quanto ao risco de cada um desses investimentos.

[2] Os dados para a montagem deste gráfico encontram-se na planilha Gráfico Slide 29.xlsx.

Ações Ordinárias: A carteira de ações ordinárias é composta por ações das 500 maiores empresas dos U.S.A. que formam o *Standard & Poor´s Composite Index* (em termos de valor de mercado total das ações).

Ações de empresas Pequenas: Essa carteira é composta por ações de empresas menores, ou seja, pelos 20% das empresas de menor porte negociadas na Bolsa de Valores de New York (NYSE), novamente medidas pelo valor de mercado do total de ações.

Obrigações a longo prazo: emitidas por empresas. É uma carteira formada por obrigações de baixo risco, com prazo de vencimento de 20 anos.

Obrigações a longo prazo emitidas pelo governo dos Estados Unidos. É uma carteira formada por obrigações do governo dos Estados Unidos, com prazo de vencimento de 20 anos.

Letras do tesouro americano (*T-Bills*). É uma carteira formada por letras do tesouro americano, com prazo de vencimento de três meses e emitidas semanalmente.

Esses retornos não foram ajustados por inflação ou impostos; portanto, são retornos brutos e nominais.

Se alguém tivesse investido $ 1.000 numa carteira de ações de grandes empresas em 1925 e depois, reinvestidos todos os dividendos recebidos, o seu investimento teria crescido para $ 2.845.697 em 1999. Durante este mesmo período, uma carteira de ações de pequenas empresas cresceu mais do que $ 6.641.505. Porém se em vez disto ele ou ela tivesse investido em títulos do governo de longo prazo, os $ 1.000 teriam crescidos para apenas $ 40.219, e para um miserável $ 15.642 para títulos de curto prazo.

Dados estes números, por que alguém investiria em títulos? A resposta é, “porque os títulos são menos arriscados”. Enquanto as ações ordinárias durante os 74 anos passados produziram retornos consideravelmente superiores, (1) não podemos garantir que o passado é um prólogo para o futuro, e (2) os valores das ações são mais prováveis a experimentarem declínios impetuosos do que os títulos, assim têm-se uma chance maior de se perder dinheiro com um investimento em ações. Por exemplo, em 1990 as ações de pequenas empresas perderam em média 21,6% do seu valor, e as ações das grandes empresas sofreram também perdas. Títulos de longo prazo (obrigações), entretanto, forneceram retornos positivos naquele ano, como eles quase sempre fazem. E o setembro de 2008?

É claro, alguns títulos são mais arriscados do que outros, e mesmo assim em anos quando o mercado todo de ações sobe, muitas ações individuais caem. Portanto, colocar todo o seu dinheiro numa única ação é extremamente arriscado. De acordo com o artigo da *Business Week*, a melhor arma simples contra o risco é a diversificação: “espalhando seu dinheiro, você não ficará amarrado às instabilidades de um dado mercado, ação, ou setor... Correlação, na linguagem de gestão de carteiras, ajuda-o a diversificar apropriadamente porque ela descreve o quanto dois investimentos seguem um ao outro. Se eles se moverem emparelhados, eles provavelmente sofrerão as mesmas más notícias. Então, você deve combinar ativos com baixas correlações”.

Os investidores dos U.S.A. tendem a pensar no “mercado de ações” como o mercado de ações dos U.S.A.. Entretanto, as ações dos U.S.A. chegam a 35% do valor de todas as ações. Mercados estrangeiros tem sido muito lucrativos, e eles não estão perfeitamente correlacionados com os mercados dos U.S.A. Portanto, a diversificação global oferece aos investidores dos U.S.A. uma oportunidade para aumentarem seus retornos e ao mesmo tempo reduzirem o risco. Entretanto, investir no estrangeiro leva a alguns riscos próprios, notavelmente “taxa de risco de câmbio” que é o perigo de que as taxas de câmbio mudem diminuindo o número de dólares que uma moeda estrangeira comprará.

Embora a verdade central do artigo *Business Week,* foi a maneira de se medir e daí reduzir o risco, ele não apontou que alguns instrumentos criados recentemente que são realmente extremamente arriscados foram negociados como investimentos de baixo risco para os investidores ingênuos. Por exemplo, muitos fundos mútuos foram advertidos que suas carteiras “contendo somente títulos bancados pelo governo dos U.S.A.”, mas, então falharam ao destacar que os fundos por si mesmos estavam usando alavancagem financeira, estavam investindo em “derivativos”, ou fazendo alguma outra ação que chuta os rendimentos correntes mas expõe a imensos riscos.

Quando você terminar este capítulo, você deverá entender qual é o risco, quando for medido, e que ações podem ser levadas a efeito para minimizá-los, ou no mínimo garantir que você compensou adequadamente a sua influência.

ESTATÍSTICAS DOS RETORNOS

O risco de um ativo pode ser analisado de duas maneiras:

(1) como risco de um *único ativo*, em que o ativo é considerado isoladamente, e

(2) em uma base de *carteira*, em que o ativo é um entre muitos outros em um portfólio (carteira).

RISCO ISOLADO

O **risco isolado** é o risco a que o investidor estaria exposto se ele ou ela tivessem somente um único ativo. Obviamente, a maioria dos ativos é mantida em carteiras, mas é necessário compreender o risco isolado a fim de compreender o risco em um contexto de carteira.

Para aprendermos alguma coisa sobre comportamento dos ativos financeiros, comecemos degustando os dados históricos apresentados na seção anterior.

Calculando os retornos médios dos diferentes investimentos, temos a tabela abaixo[3]:

Aplicação	Retorno % médio
Ações Ordinárias	13,0%
Ações de empresas pequenas	17,7
Obrigações de empresas a longo prazo	6,1
Obrigações do governo a longo prazo	5,6
Letras do Tesouro dos Estados Unidos	3,8
Inflação	3,2

Nesta tabela os valores **do retorno % médio** foram encontrados pela média aritmética, assim:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_T}{T}$$

Lembremos a Estatística Descritiva onde a média de um conjunto de dados coletados é definida como uma medida de tendência central (a medida mais comumente usada). O seu valor é calculado como a soma de todos os pontos dados, dividida pelo número de pontos dados.

A tabela mostra quão elevados são os retornos em ações, em comparação, aos retornos de títulos de longo prazo (obrigações).

Essas médias, naturalmente, são nominais, porque não nos preocupamos com a inflação. Note que a inflação média foi de 3,2% ao ano no período que calculamos. A taxa de retorno nominal sobre as letras do tesouro dos Estados Unidos (*T-bills*) foi de 3,8% ao ano, sendo então o retorno real médio das letras do tesouro aproximadamente 0,6% ao ano; enquanto que o das ações de pequenas empresas foi de 17,7% - 3,2% = 14,5%, o que é relativamente elevado. Isto significa que a sua riqueza real é praticamente duplicada a cada 5 anos.

A MÉDIA NA HP-12C

Na HP-12C, os dados estatísticos são armazenados como um conjunto de somatórios resultantes dos dados coletados originalmente. Este conjunto de dados coletados originalmente deve ser digitado antes de se usar quaisquer características estatísticas disponíveis na HP-12C, porque todos os valores produzidos por estas ferramentas estatísticas dependem deles.

A organização da memória da HP-12C permite o estudo dos dados estatísticos organizados como amostras de uma ou duas variáveis.

Para limparmos os registros estatísticos da HP-12C, pressionamos **f** **Σ**

[3] Stocks, bonds, bills, and inflation 1997 yearbook™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago.

A introdução dos dados é feita pressionando a tecla **Σ+** após a digitação do dado (ou par de dados separados pelo ENTER). O visor mostra

Após a introdução dos dados a HP-12C calcula as seguintes somas e armazenas nos registradores R1 a R6:

Registrador 1 .... n

Registrador 2 ...$\sum x_n$

Registrador 3.... $\sum x_n^2$

Registrador 4 ... $\sum y_n$

Registrador 5 ... $\sum y_n^2$

Registrador 6 ... $\sum x_n \cdot y_n$

Portanto, não armazene nenhum dado nestas memórias enquanto estiver fazendo cálculos estatísticos.

Por exemplo, para um par de dados digita-se o dado y ENTER, o dado x e, depois pressione a tecla **Σ+.** Os somatórios acima são calculados e armazenados automaticamente e o visor mostrará o número de dados digitados até ser pressionado o último **Σ+**.

EXEMPLO

Os 10 últimos preços de venda da ação XYZ foram: $19,80; $18,50; $20,52; $22,53; $20,67; $20,18; $20,00; $18,90; $19,21; $20,04. Qual foi a média destes preços de venda?

Solução

Certifique-se em apagar os registros estatísticos antes de iniciar os cálculos. Para isso, pressione **f Σ** antes de tudo.

Daí comece a digitação:

19.80 **Σ+** ....o visor mostrará 1 (o primeiro dado)

20,52 **Σ+** e assim até o último dado.

Para se calcular a média aperte **g $\bar{x}$** aparecerá 20.04, no visor, representando o preço médio da ação XYZ.

RETORNO HISTORICO ACUMULADO

É o retorno que um investidor obteria se permanecesse com as ações por n períodos de tempo. Se medirmos o tempo em anos e chamando de R_i a taxa de retorno obtida no ano i, a taxa de retorno acumulada, R_{acum}, no final de n períodos de tempo é dada pela expressão:

$$R_{acumulado} = \{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \ldots (1 + R_n) - 1\}x100$$

EXEMPLO

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxas anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos. Qual a taxa de retorno acumulada?

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

Solução

$$R_{acumulado} = \{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \dots (1 + R_n) - 1\}x100$$

$$R_{acumulado} = \{(1 + 0{,}10)x(1 + 0{,}06)x(1 - 0{,}03)x(1 + 0{,}025) - 1\}x100 = 15{,}92\%$$

Para fazer isso na HP12-C, digite:

100 ENTER 10 % + ENTER 6 % + ENTER 3 CHS % + ENTER 2.5 % + 100 –

Obtemos 15.9296 %

Iniciamos introduzindo 100, para trabalharmos em porcentagem. Este "truque" é bom!

Para fazer isso no Excel, existe a função embutida VFPlano:

	A	B	C	D	E
1	Ano	Taxa de Retorno			
2	1	10%			
3	2	6%			
4	3	-3%			
5	4	3%			
6					
7	VFPlano	15,9296%	=VFPLANO(1;B2:B5)-1		
8					
9					

RETORNO MÉDIO GEOMÉTRICO

Uma medida muito utilizada em análise de retornos acumulados é a MÉDIA GEOMÉTRICA, sobretudo em problemas que envolvam valores que crescem exponencialmente, como é o caso do retorno de carteiras de investimentos:

$$\overline{R_{geom}} = \sqrt[n]{\{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \dots (1 + R_n)\}} - 1$$

Uma aplicação desta média seria calcular o valor final de um produto que custa R$ 100,00 e tenha aumentos em cada um dos três meses seguintes de 15%, 20% e, uma redução de 5%, respectivamente, e queremos encontrar sua taxa média mensal equivalente.

EXEMPLO

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxas anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos. Qual a taxa média geométrica de retorno?

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

Solução

$$\overline{R_{geom}} = \sqrt[n]{\{(1 + R_1)x(1 + R_2)x(1 + R_3)x \dots (1 + R_n)\}} - 1 =$$

$$= \sqrt[4]{\{(1 + 0{,}10)x(1 + 0{,}06)x(1 - 0{,}03)x \dots (1 + 0{,}025)\}} - 1 = 0{,}0376 \text{ ou } 3{,}76\%$$

Na HP-12C, faríamos:

1.10 ENTER 1.06 x 0.97 x 1.025 x 4 1/x Y^x ENTER 1 - 0.03764

No Excel, temos uma função embutida chamada MÉDIA.GEOMÉTRICA para realizar este cálculo.

	A	B	C	D	E	F
1	Ano	Taxa de Retorno	Taxa de Retorno			
2	1	10%	1,100			
3	2	6%	1,060			
4	3	-3%	0,970			
5	4	3%	1,025			
6						
7	VFPlano	15,9296%	=VFPLANO(1;B2:B5)-1			
8	Média Geométrica	0,03764	=MÉDIA.GEOMÉTRICA(C2:C5)-1			
9						
10						

Esta função do Excel não aceita valores negativos e por conseguinte, acrescentei 1 a cada valor e subtraí 1 no final. Se a célula estivesse formatada para porcentagem, o resultado seria 3,764%.

A média aritmética neste exercício dará: 3,7625%.

No longo prazo recomenda-se a média geométrica

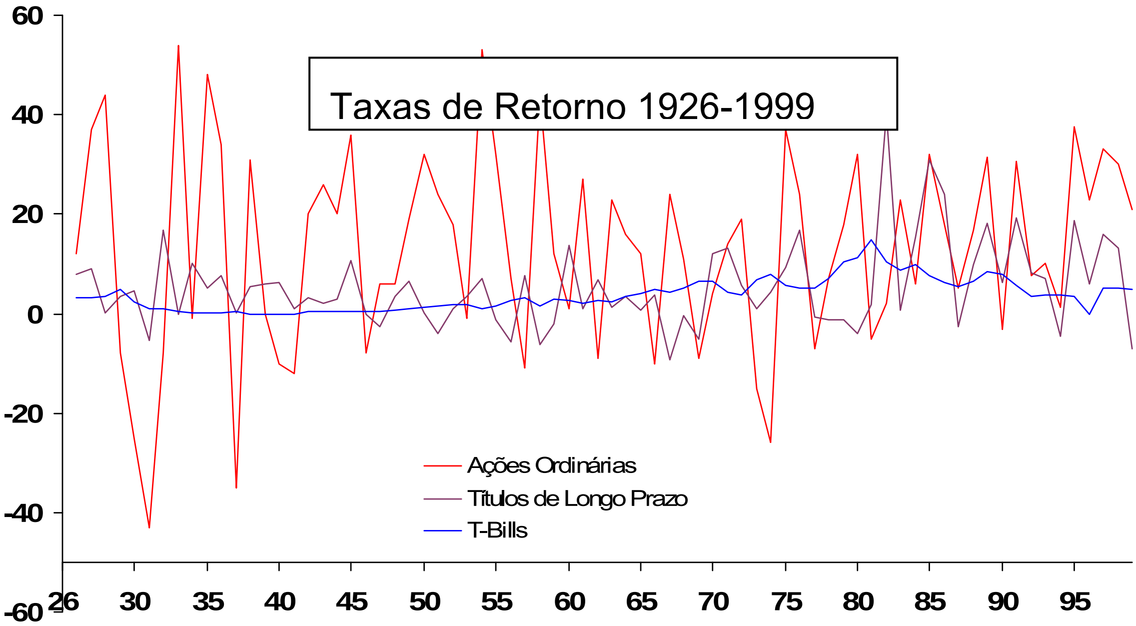
O que estudamos até agora foi uma das medidas de tendência central, a média. As outras medidas: mediana e a moda não foram tratadas, pois, não contribuem em grande parte ao estudo ou análise de retornos totais ou porcentuais.

O que iremos abordar a seguir são as medidas de espalhamento ou dispersão dos retornos em torno da média, quais sejam: desvio padrão, variância e coeficiente de variação das taxas de retorno.

Estas medidas são de extrema importância porque estão intimamente relacionadas ao risco. Aliás, são elas que medem o risco do(s) ativo(s) financeiro(s).

ESTATÍSTICA DESCRITIVA DO RISCO

Depois de calculados alguns dos retornos médios, parece lógico compararmos uns aos outros. Olhando o gráfico dos retornos históricos dos diversos ativos[4], vemos que os *T-bills* não apresentaram grande parte da variabilidade que observamos, por exemplo, no mercado de ações. Isto porque o governo toma dinheiro emprestado, emitindo títulos da dívida. Os *T-bills* possuem menor prazo de vencimento entre todas as dívidas do governo. Como o governo sempre pode cobrar impostos para pagar as suas contas, sua dívida é virtualmente livre de risco de inadimplência a curto prazo. Por isso, a taxa de retorno de tais dívidas é chamadas *taxa de retorno livre de risco* e é utilizadas como padrão de referência.



[4] Os dados utilizados para a montagem deste gráfico podem ser encontrados na pasta Gráfico Slide 43.xlsx

Fonte: © *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (annually updates work by Roger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield).

Chama-se **prêmio por risco** o retorno excedente exigido, de uma aplicação em um ativo com risco, acima do exigido uma aplicação livre de risco. Assim

$$\text{Prêmio por risco} = R_i - R_{free}$$

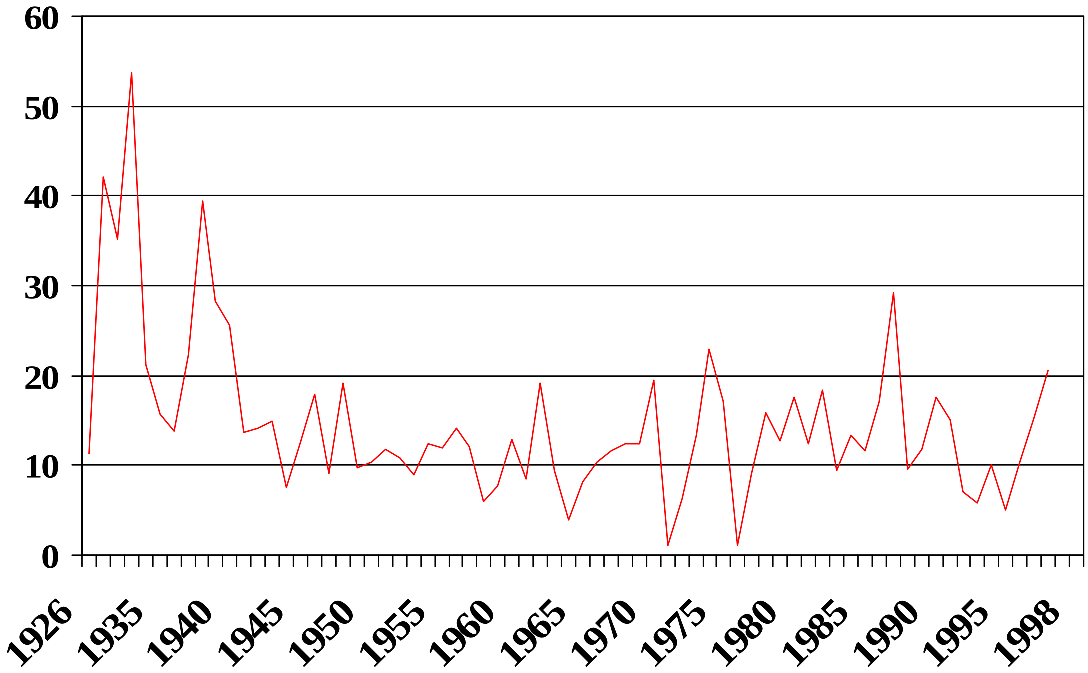
A tabela abaixo mostra o prêmio por risco dos ativos históricos que estamos discutindo.

Aplicação	Retorno % médio	Prêmio por risco
Ações Ordinárias	13,0%	9,2%
Ações de empresas pequenas	17,7	13,9
Obrigações de empresas a longo prazo	6,1	2,3
Obrigações do governo a longo prazo	5,6	1,6
Letras do Tesouro dos Estados Unidos	3,8	0
Inflação	3,2	

Nela observamos que o prêmio médio por risco produzido por uma ação típica de grande empresa é 13,0% - 3,8% = 9,2%. Essa é uma recompensa significativa.

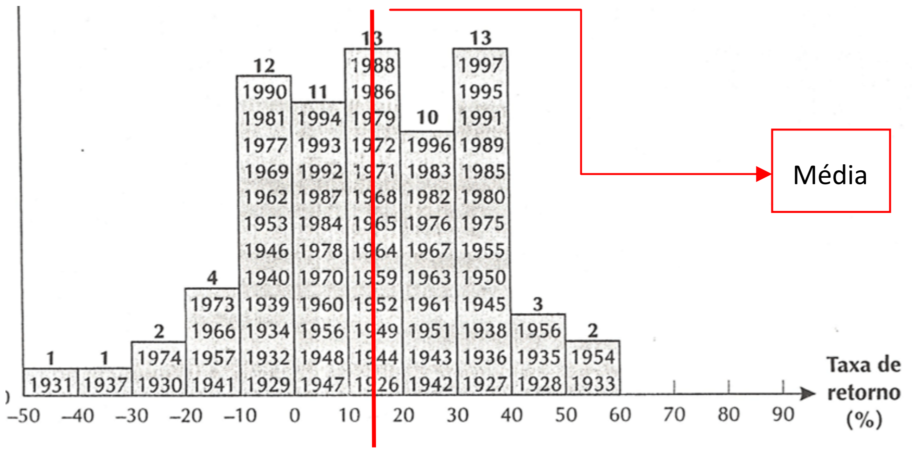
Tiramos daqui a nossa primeira lição dos dados históricos: ativos com risco, em média, geram prêmios por risco. Em outras palavras, existe uma recompensa por assumir riscos.

A pergunta é: *o que determina a magnitude relativa de prêmios por riscos de diferentes ativos?* A resposta constitui a base da moderna teoria de finanças e dedicaremos uma boa parte do nosso estudo a ela, posteriormente. Por ora, vamos encontrar partes da resposta examinando as variações históricas dos diferentes investimentos, voltando atenção à medida da variabilidade dos retornos, isto é, porque os retornos anuais de ações ordinárias tendem a ser mais voláteis que, digamos, os retornos de obrigações do governo.



Distribuição de frequências dos retornos das ações ordinárias: 1926 - 1997

Para começar, podemos desenhar a distribuição de frequências dos retornos de ações ordinárias (grandes empresas) como mostra a figura abaixo.



Fonte: *Stocks, bonds, bills, and inflation 1997 yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago.

Observe que os retornos mais frequentes (moda) estão nos intervalos entre 10% e 20% e entre 30% e 40% (distribuição bimodal). Em ambos os casos, a frequência do retorno da carteira de aços ordinárias foi igual a 13, em 72 anos.

O que precisamos agora é medir a dispersão efetiva entre os retornos. Sabemos, por exemplo, que o retorno de ações ordinárias em um ano típico foi 13,0%. Agora desejamos saber em quanto o retorno real desviou-se desta média de um ano típico. Em outras palavras precisamos medir quão volátil o retorno é. Mediremos esta volatilidade pela **variância** e sua raiz quadrada, o **desvio-padrão**.

Variância = É a média do quadrado da diferença entre o retorno verdadeiro e o retorno médio.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n}$$ ... para uma população

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n-1}$$ ... ... para uma amostra

EXEMPLO

A tabela 1.1, a seguir, mostra as taxas anuais de retorno das ações da Cia. Alfa S.A., verificadas em 4 anos. Qual a variância da taxa de retorno?

Tabela 1.1 Taxas de retorno anuais da Cia. Alfa S.A.

Ano	Taxa de Retorno
1	10%
2	6%
3	-3%
4	2,5%

Solução

Aplicando a fórmula da variância amostral, temos:

$$VAR \text{ ou } s^2 = \frac{(10-3{,}88)^2 + (6-3{,}88)^2 + (-3-3{,}88)^2 + (2{,}5-3{,}88)^2}{\;} = 30{,}36\%$$

Na HP-12C introduzimos os dados como antes (cálculo do retorno médio):

f Σ 10 Σ+ 6 Σ+ 3 CHS Σ+ 2.5 Σ+ g s ENTER 2 y^x … 30.3958

No Excel, temos a função **VAR.A** para a realização deste cálculo no caso de uma amostra[5]:

[5] No caso de uma população, usamos a função VAR.P

	A	B	C	D	E
1	Ano	Taxa de Retorno			
2	1	10%			
3	2	6%			
4	3	-3%			
5	4	2,5%			
6					
7	Variança	30,40%	=VAR.A(B2:B5)*100		
8					
9					
10					

Quando trabalhamos com valores em porcentagens, devemos multiplicar por 100, pois na fórmula os valores porcentuais (divididos por 100) são elevados ao quadrado, resultando 10.000 menores. Ao multiplicarmos por 100, recuperamos o valor porcentual.

Outro conceito importantíssimo para nós em análise de risco é o DESVIO-PADRÃO.

Desvio-padrão = É a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n}} \quad \text{para uma população}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}{n-1}} \quad \text{para uma amostra}$$

A propriedade do desvio padrão é tal que quando os dados subjacentes estão *normalmente distribuídos*, aproximadamente 68% de todos eles caem dentro de **um** desvio padrão em cada lado da média, e aproximadamente 95% de todos os valores caem dentro de **dois** desvios padrões de cada lado da média[6].

Isto tem aplicação em muitos campos, particularmente quando se tenta decidir se um valor observado não é usual de ser significativamente diferente da média.

Até o momento, enfatizamos a variabilidade anual dos retornos. Devemos observar que, mesmo os movimentos diários podem apresentar uma volatilidade considerável. Por exemplo, recentemente, em 27 de outubro de 1997, o Índice *Down Jones* apresentou a drástica variação de 554,26 pontos. De acordo com os padrões históricos, esse foi um dos piores dias para as 30 ações que compõem o índice (assim como para a maior parte das ações no mercado). Mesmo assim, embora a queda tenha sido a maior que o Índice *Dow Jones* sofreu em termos de pontos, foi na realidade a 12ª maior queda percentual da história em um dia, como mostra a tabela a seguir:

Maiores Variações Percentuais do Índice Dow Jones em um diaResultado	
19 de outubro de 1987	-22,6%
28 de outubro de 1929	-12,8
29 de outubro de 1929	-11,7
6 de novembro de 1929	-9,9
18 de dezembro de 1899	-8,7
12 de agosto de 1932	-8,4
14 de março de 1907	-8,3
26 de outubro de 1987	-8,0
21 de julho de 1933	-7,8
18 de outubro de 1937	-7,7
1 de fevereiro	-7,2
27 de outubro de 1997	-7,2

[6] Isto será visto em detalhes adiante. Não se preocupe por enquanto.

Esta discussão enfatiza a importância de se examinar retornos em termos percentuais em vez de valores em dólares ou números de pontos do índice

O DESVIO PADRÃO NA HP-12C

Após ter introduzidos os dados como fizemos para a média, simplesmente pressione **g s**.

EXEMPLO

Os 10 últimos preços de venda da ação XYZ foram: $19,80; $18,50; $20,52; $22,53; $20,67; $20,18; $20,00; $18,90; $19,21; $20,04. Qual foi o desvio padrão e a variância destes preços de venda?

Solução

Certifique-se em apagar os registros estatísticos antes de iniciar os cálculos. Para isso, pressione **f Σ** antes de tudo.

Daí comece a digitação:

19.80 **Σ+** ....o visor mostrará 1 (o primeiro dado)

20,52 **Σ+** e assim até o último dado.

Para se calcular o desvio padrão aperte **g s** aparecerá 1,12, no visor, representando a volatilidade da ação XYZ.

A seguir pressione ENTER 2 e y^x e encontre a variância da amostra s^2 = .

Baseado nestes números, aproximadamente 68% dos preços está no intervalo de $20,04 ±$1,12. Ou seja, entre $ 18,92 e $ 21,16.

OBSERVAÇÃO: Ao desejarmos o desvio-padrão da população, basta calcular a média e introduzir a média novamente como um novo elemento no conjunto de dados e repetir o cálculo **g s**, obtendo o desvio padrão da população.

O efeito da introdução da média como elemento aumenta o conjunto de dados, mas não afeta a soma dos desvios em relação à média, pois quando se subtrair a média dela mesma, o resultado será nulo.

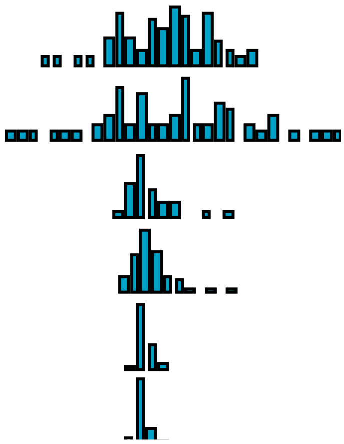
No Excel o desvio padrão dos valores da tabela 1.1 é encontrado com a função DESVPAD.A(intervalo de valores), assim

	A	B	C	D	E
1	Ano	Taxa de Retorno			
2	1	10%			
3	2	6%			
4	3	-3%			
5	4	2,5%			
6					
7	Variança	30,40%	=VAR.A(B2:B5)*100		
8	Desvio Padrão	5,513%	=DESVPAD.A(B2:B5)		
9					

O desvio padrão aceita os valores porcentuais e realiza o cálculo normalmente, isto é não precisamos multiplicar o resultado por 100.

Usando a calculadora (ou o Excel) podemos obter os retornos históricos de 1926- 1999:

Séries	Retorno Anual Médio	Desvio Padrão	Distribuição
Ações de Grandes Empresas	**13.0%**	**20.3%**	
Ações de Pequenas Empresas	**17.7**	**33.9**	
Títulos Empresariais de Longo Prazo	**6.1**	**8.7**	
Títulos do Governo de Longo Prazo	**5.6**	**9.2**	
U.S. Treasury Bills	**3.8**	**3.2**	
Inflação	**3.2**	**4.5**	

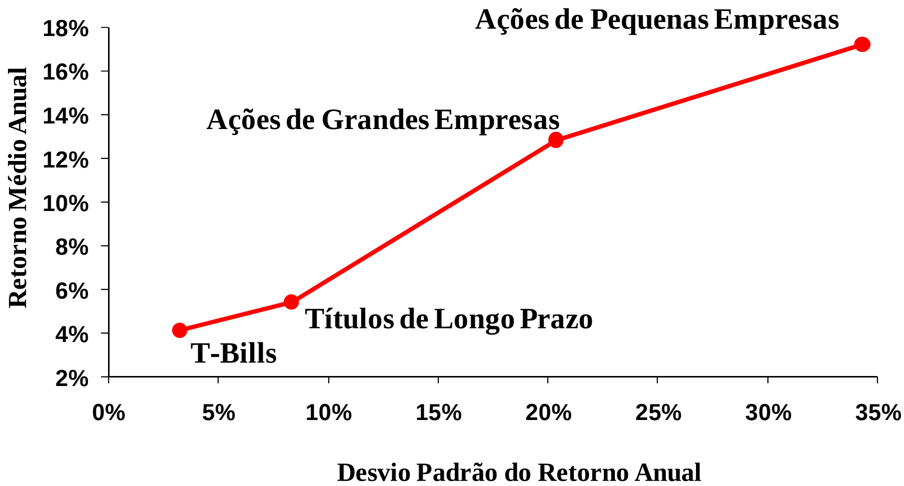


Fonte: © *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado por Roger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

A figura acima resume várias das discussões mantidas até agora sobre a história do mercado de capitais. Mostra os retornos médios, desvios padrões e distribuições de frequências de retornos anuais em uma escala comum. Observe nela que o desvio padrão da carteira de ações de pequenas empresas, por exemplo, é (33,9% a.a.) quase 10 vezes maior que o desvio-padrão das *T-bills* (3,2% a.a.).

Uma segunda lição extraída da análise destes retornos históricos de diversos ativos financeiros é que *quanto maior a recompensa em potencial, maior é o risco em potencial*.

O trade-off Risco-Retorno será:



Podemos observar que:

- Taxa de retorno sobre *T-bills* é essencialmente livre de risco.
- Investir em ações é arriscado.
- Para os investidores tolerarem este risco, eles precisam ser compensados – eles exigem um prêmio de risco.
- A diferença entre o retorno sobre os *T-bills* e ações é o prêmio de risco por se investir em ações.
- Um velho ditado da *Wall Street* é "Você pode ou dormir bem ou comer bem".

Não existe uma definição universalmente aceita para o risco. As medidas do risco que discutimos são a variância e o desvio padrão.

O desvio padrão é a medida estatística padrão do espalhamento de uma amostra, e ela será a medida que usaremos na maioria das vezes.

QUESTÃO: O retorno esperado das ações deveria ser uma função da variância ou do desvio padrão das ações?

Um importante atributo do desvio padrão como uma medida de espalhamento é que se a média e o desvio padrão de uma distribuição normal são conhecidos, é possível calcular o percentil associado com qualquer resultado dado. Numa distribuição normal, cerca de 68% dos resultados estão dentro de um desvio padrão da média e cerca de 95% dos resultados estão dentro de dois desvios padrões da média. O desvio padrão tem sido comprovado uma medida extremamente útil do espalhamento em parte porque ele é matematicamente tratável. Muitas fórmulas de estatística inferencial usam o desvio padrão.

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO (CV)

O coeficiente de variação é uma medida estatística que indica a dispersão relativa, isto é, o risco unitário de um ativo. É calculada pela seguinte expressão:

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \text{ ....para a população}$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \text{ ....para a amostra}$$

Por ser uma medida relativa e não absoluta, como o desvio padrão, o CV é um indicador mais exato na comparação de riscos de ativos com diferentes retornos esperados. Ele indica a dispersão relativa, ou seja, o risco por unidade de retorno esperada.

Quanto maior o coeficiente de variação, maior será o risco do ativo.

EXEMPLO

Os retornos mensais dos investimentos em ações A e B durante os últimos 6 meses estão apresentados na tabela seguinte:

A	B
5%	6%
9%	7%
15%	9%
12%	7%
9%	6%
6%	8%

a. Calcule os retornos médios de A e B.
b. Calcule os desvios padrões de A e B.
c. Qual dos dois apresenta maior dispersão?

Solução

Certifique-se em apagar os registros estatísticos antes de iniciar os cálculos. Para isso, pressione **f Σ** antes de tudo.

Daí comece a digitação:

5 **Σ+** ....o visor mostrará 1 (o primeiro dado)

9 **Σ+** e assim até o último dado.

Para se calcular a média dos retornos da Ação A pressionamos **g $\bar{x}$**, o visor mostrará 9,33, a seguir, para o cálculo do desvio padrão da Ação A, aperte **g s** aparecerá 3,72, no visor, representando a sua volatilidade.

A seguir, fazendo a mesma coisa para a Ação B e calculando o CV de ambas as ações, ficamos com:

	A	B
$x_{médio}$	9,33%	7,17%
s	3,72%	1,17%
CV	39,9%	16,9%

O coeficiente de variação CV mede a variabilidade (em Finanças = RISCO do investimento).

Neste exemplo temos que o CV (risco) da Ação A é MAIOR que o da ação B.

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

Os retornos anuais das ações X e Y durante os últimos 5 anos foram:

X	Y
12%	12%
15%	16%
12%	15%
11%	9%
14%	13%

a. Quais os retornos médios das ações X e Y? Resp: $X_{Médio}$ = 12,80 e $Y_{médio}$ =13%.

b. Quais os desvios padrões dos retornos das ações X e Y? S_X = 1,64 e S_Y = 2,74.

c. Quais os coeficientes de variações das ações X e Y? CV_X = 0,13 e CV_Y =0,21

d. Qual ação apresenta maior risco? A ação Y

EXERCÍCIOS

1. Suponha que a Capivara Co. e a Berts Co., tenham apresentado os seguintes retornos nos últimos quatro anos:

Ano	Capivara Co.	Berts Co.
2006	12%	12%
2007	15%	16%
2008	12%	15%
2009	11%	9%

a. Quais os retornos médios? Resp: $Capivara_{Médio}$ = 17,50 e $Berts_{médio}$ =5,5%.

b. Quais os desvios padrões dos retornos?$S_{Capivara}$ = 0,2987 e S_{Berts} = 0,1327.

c. Quais as variâncias dos retornos? $S^2_{capivara}$ = 0,0892 e S^2_{Berts} = 0,0176

d. Qual empresa apresenta maior risco? A Berts é um investimento mais volátil

2.

RISCOS E RETORNOS ESPERADOS

CONTEMPLANDO O FUTURO

Até agora ficamos focado no passado e aprendemos algumas lições sobre a história dos mercados de capitais:

1ª lição – Existe uma recompensa, na média, por assumir risco, chamada de prêmio por risco.

2ª lição – O prêmio por risco é maior nos investimentos mais arriscados.

Vamos agora explorar as implicações econômicas e gerenciais desta ideia básica.

Até agora, nas nossas análises, concentramo-nos principalmente no comportamento do retorno de algumas carteiras amplas. Precisamos expandir nossas considerações para incluir títulos individuais. Temos então duas tarefas:

1ª tarefa – Precisamos definir **risco** e discutir como *medi-lo*.

2ª tarefa – Necessitamos *quantificar a relação* entre os **riscos** e os **retornos exigidos** dos ativos.

Como dissemos, anteriormente discutimos como calcular retornos *médios* e variâncias utilizando dados históricos. Comecemos agora a discutir como analisar retornos e variâncias quando as informações disponíveis dizem respeito a possíveis retornos *futuros* e suas possibilidades de ocorrência.

Para tanto precisamos de uma nova medida estatística, chamada média ponderada.

MÉDIA PONDERADA

Numa **média aritmética simples**, os valores individuais são adicionados e divididos pelo número de valores envolvidos. Com efeito, *cada* peso do valor ou contribuição à média é 1/n, onde n é o número de valores na amostra.

Comparativamente, uma **média ponderada** é uma média calculada dando *diferentes* pesos a alguns dos valores individuais.

Exemplos:

Uma média simples dos três números 5, 10 e 15 aplica-se um peso igual a (1/3) para cada valor e a uma média simples dos três números 5, 10 e 15 aplica-se um peso igual a (1/3) para cada valor e a média resultante é 10.

Uma média ponderada ou média poderá aplicar um peso de 50% a 5 e 25% para cada um dos 10 e 15, resultando numa média ponderada de 8,75.

Existem muitas situações onde um cálculo de média ponderada economiza uma grande porção de tempo do que usar uma abordagem de média simples.

Dado um conjunto de dados coletados onde valores repetidos v_n ocorrem k_n vezes (peso), a média ponderada é calculada como:

$$\overline{x}_w = \frac{\sum (k_n \cdot v_n)}{\sum k_n}$$

MÉDIA PONDERADA NA HP-12C

Na HP-12C a média ponderada é calculada com o uso das teclas **g** $\bar{x}_w$ e os conteúdos de dois somatórios são usados.

$$\overline{x}_w = \frac{\sum w\,x}{\sum w}$$

EXEMPLO

Um grande *shopping center* quer saber a média ponderada dos preços de venda de 2.000 unidades de um produto que tem o seu preço final ajustado de acordo com os primeiros dez dias de vendas. Calcule o **preço médio** e a **média ponderada dos preços de vendas** deste produto.

Preço por unidade	# de unidades vendidas	Preço por unidade	# de unidades vendidas
R$ 24,20	354	R$ 24,14	288
R$ 24,10	258	R$ 24,06	240
R$ 24,00	209	R$23,95	186
R$ 23,90	133	R$ 23,84	121
R$ 23,82	110	R$ 23,75	101

Solução

Certifique-se em apagar as memórias estatísticas/somatório antes de iniciar o problema.

f Σ

Médias regulares e médias ponderadas podem ser calculadas dos mesmos dados acumulados na HP12C, desde que a ordem dos valores seja entrada corretamente: *valor* **ENTER** *peso*.

24.20 ENTER 354 Σ+ **24.14 ENTER 288 Σ+** **24.10 ENTER 258 Σ+**
24.06 ENTER 240 Σ+ **24.00 ENTER 209 Σ+** **23.95 ENTER 186 Σ+**
23.90 ENTER 133 Σ+ **23.84 ENTER 121 Σ+** **23.82 ENTER 110 Σ+**
23.75 ENTER 101 Σ+

Para calcular a média ponderada dos preços de venda: **g** $\bar{x}_w$ 24,03

Para calcular o preço médio:

g $\bar{x}$ **R↓** 23,98

Note que a tecla R↓ é pressionada porque o valor que aparece no visor após **g** $\bar{x}$ ser pressionados é a média dos **pesos** e não será de nenhuma utilidade neste exemplo.

O Excel dispõe de uma função fantástica para encontrarmos a média ponderada, trata-se de função SOMARPRODUTO(matriz1;matriz2).

Vejamos como fica o exemplo anterior no Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	Preço por unidade	# de unidades vendidas				
2	R$ 24,20	354				
3	R$ 24,10	258				
4	R$ 24,00	209				
5	R$ 23,90	133				
6	R$ 23,82	110				
7	R$ 24,14	288				
8	R$ 24,06	240				
9	R$ 23,95	186				
10	R$ 23,84	121				
11	R$ 23,75	101				
12						
13						
14	Média Ponderada	R$ 24,03	=SOMARPRODUTO(B2:B11;A2:A11)/SOMA(B2:B11)			
15						
16						

RETORNO ESPERADO

É a expectativa futura de retorno de um ativo com risco. Este será a primeira medida importante para o estudo do risco e representa a média dos vários resultados (*outcomes*) esperados *ponderados* pela probabilidade atribuída a cada um desses valores. Assim

$$E(R) = \sum_{k=1}^{n} (P_k \ x \ R_k)$$

Onde E(R) = retorno esperado

P_k = probabilidade de ocorrência de cada evento

R_k = valor de cada resultado considerado

EXEMPLO 1

Admita que você esteja avaliando dois investimentos: A e B. Baseando-se em sua experiência de mercado e em projeções econômicas, você desenvolve a seguinte distribuição de probabilidades dos resultados monetários previstos:

Investimento A		Investimento B	
Resultados esperados	Probabilidades	Resultados esperados	Probabilidades
$ 650	25%	$ 500	30%
$ 700	50%	$ 700	40%
$ 750	25%	$ 900	30%

Solução

Substituindo-se estes dados na expressão do E(R)acima, ficamos:

$E(R_A)$ = (0,25 x $ 650) + (0,50 x $ 700) + (0,25 x $ 750) = $ 700

$E(R_A)$ = (0,30 x $ 500) + (0,40 x $ 700) + (0,30 x $ 900) = $ 700

As duas alternativas investimentos apresentam o mesmo valor esperado de $ 700, podendo-se considerar, em termos de retorno prometido, como indiferente a implementação de uma ou de outra.

Na HP-12C, faríamos:

f Σ 650 ENTER 0,25 Σ+ 700 ENTER 0,50 Σ+ 750 ENTER 0,25 Σ+ g $\bar{x}_w$

f Σ 500 ENTER 0,30 Σ+ 700 ENTER 0,40 Σ+ 900 ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$

No Excel temos:

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Investimento A		Investimento B							
2	Resultados Esperados	Probabilidades	Resultados Esperados	Probabilidades						
3	R$ 650,00	25%	R$ 500,00	30%	As células com os dados foram formatadas para moeda e porcentagem					
4	R$ 700,00	50%	R$ 700,00	40%						
5	R$ 750,00	25%	R$ 900,00	30%						
6										
7			maneira 1		maneira 2					
8	Retorno Esperado $E(R_A)$	R$ 700,00	=A3*B3+A4*B4+A5*B5		=SOMARPRODUTO($A$3:$A$5;$B$3:$B$5)					
9	Retorno Esperado $E(R_B)$	R$ 700,00	=C3*D3+C4*D4+C5*D5		=SOMARPRODUTO($C$3:$C$5;$D$3:$D$5)					
10										
11										

No exemplo anterior você estabeleceu a distribuição de probabilidades dos resultados monetários baseado na sua experiência.

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

1. Com base nas informações a seguir, calcule o retorno esperado.

Estados da Economia	Probabilidade do estado	**Retorno do título de acordo com o Estado**
Crescimento	0,30	26%
Recessão	0,70	8%

EXEMPLO 2

Considere um único período, digamos, um ano. Temos duas ações, a LMTC10 com expectativa de retorno de 70% se a economia se aquecer e -20% se houver recessão. A UDNZ15 com expectativa de retorno de 10% se a economia se aquecer e 30% se houver recessão, no mesmo período. Suponha ainda que você acredita que haverá um crescimento na economia em apenas 20% das ocasiões. Quais os retornos esperados das ações LMTC10 e UDNZ15?

Solução

Em primeiro lugar, consideremos apenas dois estados da natureza (crescimento e recessão). Haverá crescimento em 20% das ocasiões e recessão em 80% das ocasiões. Assim

Estados da Economia	Probabilidade do estado	**Retorno dos títulos de acordo com o Estado**	
		Resultados esperados da Ação LMTC10	Resultados esperados da Ação UDNZ15
Crescimento	0,20	70%	10%
Recessão	0,80	-20%	30%

Substituindo-se estes dados na expressão do E(R)acima, ficamos:

$E(R_{LMTC10}) = (0,20 \times 70\%) + (0,80 \times (-20\%)) = -2\%$

$E(R_{UDZN15}) = (0,20 \times 30\%) + (0,80 \times 10\%) = 14\%$

Na HP-12C

f Σ 70 ENTER 0,20 Σ+ 20 CHS ENTER 0,80 Σ+ g $\bar{x}_w$ .... -2.00

f Σ 30 ENTER 0,30 Σ+ 10 ENTER 0,80 Σ+ g $\bar{x}_w$ 14

No Excel, temos:

		maneira 1	maneira 2
Retorno Esperado $E(R_A)$	-2%	=A3*B3+A4*B4+A5*B5	=SOMARPRODUTO($A$3:$A$5;$B$3:$B$5)
Retorno Esperado $E(R_B)$	14%	=C3*D3+C4*D4+C5*D5	=SOMARPRODUTO($C$3:$C$5;$D$3:$D$5)

Neste exemplo supusemos que há apenas duas condições econômicas possíveis: *expansão* e *recessão*. É claro que, na verdade, a condição econômica pode variar de uma profunda depressão até uma expansão fantástica, e há um número ilimitado de possibilidades entre os extremos. Suponha que tivéssemos tempo e paciência para determinar uma probabilidade para cada possível condição econômica (com a soma das probabilidades ainda sendo igual a 1,0) e para determinar uma taxa de retorno para cada ação e em cada condição.

Poderíamos também fazer simulações de Monte Carlo para incorporar inúmeros cenários futuros (5.000 ou mais cenários).

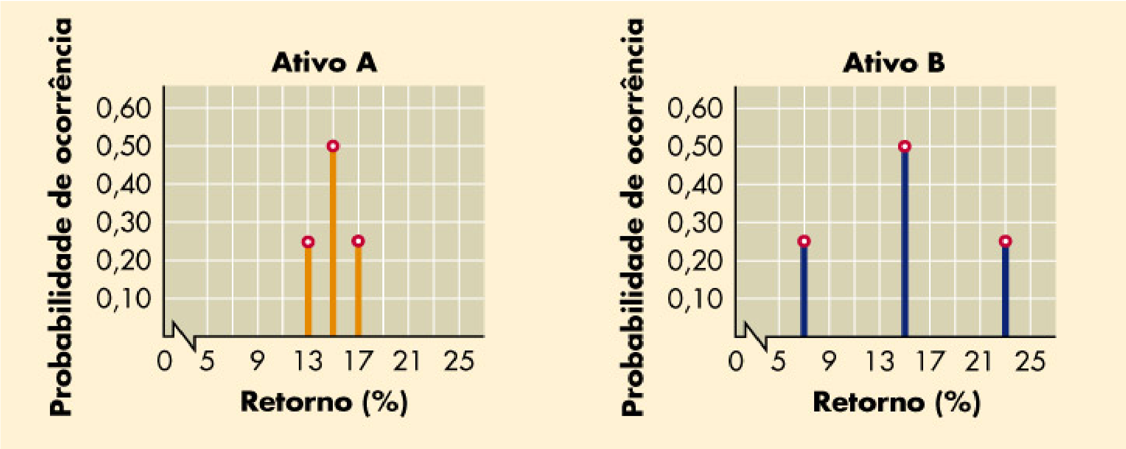
EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

1. Com base nas informações a seguir, calcule o retorno esperado:

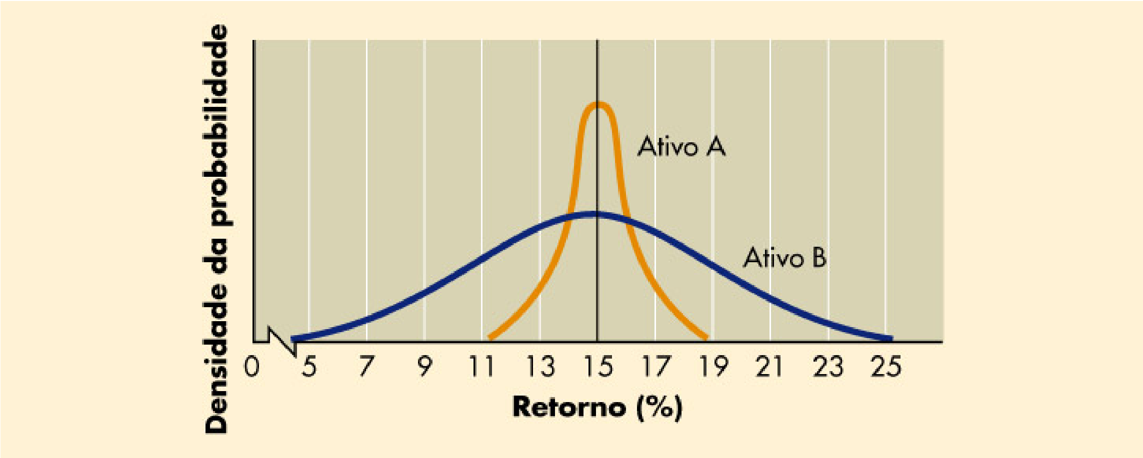
Estados da Economia	Probabilidade do estado	**Retorno do título de acordo com o Estado**
Recessão	0,10	-0,09
Normal	0,70	0,11
Crescimento	0,20	0,28

Uma forma bem ilustrativa de representar os vários retornos esperados (para vários estados da natureza) é efetuada por meio de um gráfico que envolva as distribuições de probabilidades das alternativas, como mostra a figura

Distribuições discretas de probabilidades



Distribuições contínuas de probabilidades



A medida que o valor esperado NÃO demonstra o risco associado a cada proposta de investimento, o que faz que seja necessário conhecer o grau de dispersão dos resultados em relação à média. Essa quantificação, que denota o risco do investimento, pode ser efetuada mediante os cálculos do *desvio-padrão* e *variância*.

A mais elevada medida de dispersão (variação e desvio-padrão) do ativo B, visualizada no gráfico acima, revela seu maior grau de risco em relação ao ativo A. Ou seja, a variabilidade maior da média (retorno esperado) do ativo B em relação aos possíveis resultados evidencia mais alta expectativa de risco desse ativo.

CÁLCULO DO DESVIO-PADRÃO E DA VARIÂNCIA

Essas medidas de dispersão indicam como os valores de um conjunto se dispersam em relação a seu ponto central, a média. Quanto maior se apresenta o intervalo entre os valores extremos de um conjunto, menor é a representatividade estatística da média, pois os valores em observação encontram-se mais distantes dessa medida central.

Tanto o desvio-padrão como a variância têm por objetivo medir estatisticamente a variabilidade (grau de dispersão) dos possíveis resultados em termos de valor esperado. Representam como visto, em outras palavras, medidas de risco, e são determinados pelas seguintes expressões de cálculo[7]:

[7] As calculadoras não têm nenhuma função embutida para encontrar o desvio padrão e a variância quando se trata de dados probabilísticos; nesse caso você precisa executar o processo através de tabelas, manualmente.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} P_k \; x \; (R_k - \bar{R})^2}$$

$$VAR = \sigma^2$$

EXEMPLO 1

As distribuições de probabilidades das taxas de retorno para duas empresas a Capivara Co. e a Berts Co.estão mostradas abaixo:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Retorno dos títulos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Capivara Co.	Resultados esperados da Berts Co.
Expansão	0,30	100%	20%
Normal	0,40	15%	15%
Recessão	0,30	(70%)	10%

Encontre:

a. O retorno médio de cada empresa
b. O desvio padrão de cada empresa
c. A variância de cada empresa

Solução

O retorno médio é encontrado na HP-12C como

f Σ 100 ENTER 0,30 Σ+ 15 ENTER 0,40 Σ+ 70 CHS ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$ 15%

f Σ 20 ENTER 0,30 Σ+ 15 ENTER 0,40 Σ+ 10 ENTER 0,30 Σ+ g $\bar{x}_w$ 15%

A variância[8] é encontrada como

$$\sigma^2 = 0{,}3\,x\,(100 - 15)^2 + 0{,}4\,x\,(15 - 15)^2 + 0{,}3\,x\,(-70 - 15)^2$$
$$= 0{,}3\,x\,7.225 + 0{,}4\,x\,0 + 0{,}3\,x\,7.225 = 2.167{,}5 + 0{,}0 + 2.167{,}5 = 4.335{,}0$$

$$\sigma^2 = 0{,}3\,x\,(20 - 15)^2 + 0{,}4\,x\,(15 - 15)^2 + 0{,}3\,x\,(10 - 15)^2 = 0{,}3\,x\,25 + 0{,}4\,x\,0 + 0{,}3\,x\,25$$
$$= 7{,}5 + 0{,}0 + 7{,}5 = 15{,}0$$

Os desvios padrões são encontrados como:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.335} = 65{,}84\%$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15} = 3{,}873\%$$

No Excel, teríamos:

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado da Economia		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático		
2			Resultados Esperados da Capivara Co.	Resultados Esperados da Berts Co.	Capivara Co. $(R_k - R_{med})$	Berts Co. $(R_k - R_{med})$	Capivara Co. $(R_k - R_{med})^2$	Berts Co. $(R_k - R_{med})^2$	Capivara Co. $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Berts Co. $p_k x(R_k - R_{med})^2$	
3	Expansão	0,30	100%	20%	0,85	0,05	0,7225	0,0025	0,21675	0,00075	
4	Normal	0,40	15%	15%	0,00	0,00	0,0000	0,0000	0,00000	0,00000	
5	Recessão	0,30	-70%	10%	-0,85	-0,05	0,7225	0,0025	0,21675	0,00075	
6								Variância	43,35%	0,15%	
7			maneira 1					Desvio Padrão	65,84%	3,87%	=RAIZ(VAR
8	Retorno Esperado $E(R_A)$	15%	=B3*C3+B4*C4+B5*C5					Usando as funções do Excel			
9	Retorno Esperado $E(R_B)$	15%	=B3*D3+B4*D4+B5*D5					Variância			
10								Desvio Padrão			
11											

EXERCÍCIOS

1. Para você praticar o cálculo de medidas prospectivas de desempenho de carteiras, considere dois ativos e três estados da economia.

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,10	-0,20	0,30
Normal	0,60	0,10	0,20
Crescimento	0,30	0,70	0,50

Quais são os retornos esperados e desvios-padrões destes dois ativos? Respostas: $E(R_A) = 25\%$ e $E(R_B) = 30\%$; $\sigma_A^2 = 0{,}0945$ e $\sigma_B^2 = 0{,}0180$; $\sigma_A = 30{,}74\%$ e $\sigma_B = 13{,}42\%$.

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
25											
26	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático		
27			Resultados Esperados da Ação A	Resultados Esperados da Ação B	Ação A $(R_k - R_{med})$	Ação B $(R_k - R_{med})$	Ação A $(R_k - R_{med})^2$	Ação B $(R_k - R_{med})^2$	Ação A $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Ação B $p_k x(R_k - R_{med})^2$	
28	Recessão	0,10	-0,20	0,30	-0,45	0,00	0,2025	0,0000	0,02025	0,00000	
29	Normal	0,60	0,10	0,20	-0,15	-0,10	0,0225	0,0100	0,01350	0,00600	
30	Crescimento	0,30	0,70	0,50	0,45	0,20	0,2025	0,0400	0,06075	0,01200	
31								Variância	9,45%	1,80%	
32			maneira 1					Desvio Padrão	30,74%	13,42%	=RAIZ(VAR)
33	Retorno Esperado $E(R_A)$	25%	=B28*C28+B29*C29+B30*C30					Usando as funções do Excel			
34	Retorno Esperado $E(R_B)$	30%	=B28*D28+B29*D29+B30*D30					Variância			
35								Desvio Padrão			
36											
37											
38											

2. Com base nas seguintes informações, calcule os retornos e desvios-padrões das duas ações

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,20	0,04	-0,20
Normal	0,60	0,08	0,20
Crescimento	0,20	0,16	0,60

3. Com base nas informações a seguir, calcule os riscos das companhias A e B

Estado da economia	**Probabilidades**	**Taxa de retorno projetada para as ações**	
		Cia A	Cia B
Recessão	5%	-2,3%	-1,5%
Estagnação	10%	1,5%	2,4%
Crescimento Moderado	25%	4,5%	5,6%
Crescimento Elevado	60%	6,8%	7,5%

Resp: σ_A = 2,09% e σ_B = 2,06%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
12												
13	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados p_i	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado da Economia		Desvios		Desvios Quadráticos		Probabilidade x Desvios Quadrático			
14			Resultados Esperados da Cia. A	Resultados Esperados da Cia.B	Cia.A $(R_k - R_{med})$	Cia.B $(R_k - R_{med})$	Cia.A $(R_k - R_{med})^2$	Cia.B $(R_k - R_{med})^2$	Cia.A $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Cia.B $p_k x(R_k - R_{med})^2$		
15	Recessão	5%	-2,3%	-1,5%	-7,54%	-7,57%	0,5685%	0,57229%	0,02843%	0,02861%		
16	Estagnação	10%	1,5%	2,4%	-3,74%	-3,67%	0,1399%	0,13432%	0,01399%	0,01343%		
17	Crescimento Moderado	25%	4,5%	5,6%	-0,74%	-0,46%	0,0055%	0,00216%	0,00137%	0,00054%		
18	Crescimento Elevado	60%	6,8%	7,5%				Variância	0,04378%	0,04259%		
19								Desvio Padrão	2,09242%	2,06367%		
20			maneira 1					Usando as funções do Excel				
21	Retorno Esperado $E(R_A)$	5,24%	=B15*C15+B16*C16+B17*C17+B18*C18					Variância				
22	Retorno Esperado $E(R_B)$	6,07%	=B15*D15+B16*D16+B17*D17+B18*D18					Desvio Padrão			=RAIZ(VAR)	
23												
24												

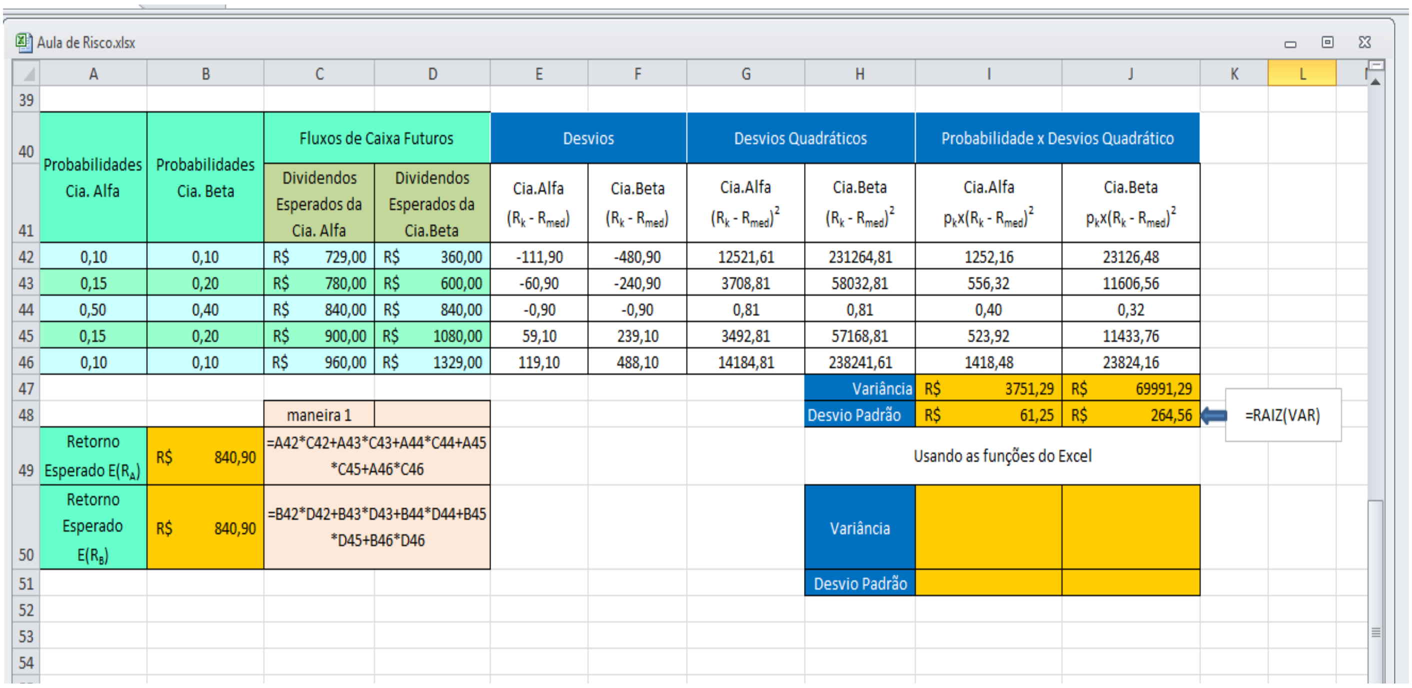
4. Suponhamos que um investidor, ao avaliar as ações das companhias Alfa e Beta, estime os seguintes fluxos de caixa futuros com suas respectivas probabilidades de ocorrência, conforme indicados na tabela abaixo:

Cia. Alfa		**Cia. Beta**	
Dividendos esperados	Probabilidades	Dividendos Esperados	Probabilidades
$ 729	0,10	360	0,10
$ 780	0,15	600	0,20
$ 840	0,50	840	0,40
$ 900	0,15	1.080	0,20
$ 960	0,10	1.329	0,10

Avalie os **retornos esperados** e os **riscos** das ações

Resp: $E(R_A)$ = $ 840,90 $E(R_B)$ = $ 840,90 σ_A = $ 61,25 σ_B = $ 264,56

Observe que ambos os investimentos fornecem o mesmo valor esperado, sendo ao investidor indiferente comprar as ações de uma ou outra companhia. Todavia, as ações da companhia Alfa exibem um risco mais baixo (menor desvio-padrão) que as ações da companhia Beta. Se o investidor tiver aversão ao risco, certamente ele comprará as ações da companhia Alfa.


Aula de Risco.xlsx

	Probabilidades Cia. Alfa	Probabilidades Cia. Beta	Fluxos de Caixa Futuros: Dividendos Esperados da Cia. Alfa	Fluxos de Caixa Futuros: Dividendos Esperados da Cia.Beta	Desvios: Cia.Alfa $(R_k - R_{med})$	Desvios: Cia.Beta $(R_k - R_{med})$	Desvios Quadráticos: Cia.Alfa $(R_k - R_{med})^2$	Desvios Quadráticos: Cia.Beta $(R_k - R_{med})^2$	Probabilidade x Desvios Quadrático: Cia.Alfa $p_k x(R_k - R_{med})^2$	Probabilidade x Desvios Quadrático: Cia.Beta $p_k x(R_k - R_{med})^2$
42	0,10	0,10	R$ 729,00	R$ 360,00	-111,90	-480,90	12521,61	231264,81	1252,16	23126,48
43	0,15	0,20	R$ 780,00	R$ 600,00	-60,90	-240,90	3708,81	58032,81	556,32	11606,56
44	0,50	0,40	R$ 840,00	R$ 840,00	-0,90	-0,90	0,81	0,81	0,40	0,32
45	0,15	0,20	R$ 900,00	R$ 1080,00	59,10	239,10	3492,81	57168,81	523,92	11433,76
46	0,10	0,10	R$ 960,00	R$ 1329,00	119,10	488,10	14184,81	238241,61	1418,48	23824,16
47								Variância	R$ 3751,29	R$ 69991,29
48			maneira 1					Desvio Padrão	R$ 61,25	R$ 264,56

=RAIZ(VAR)

49	Retorno Esperado $E(R_A)$	R$ 840,90	=A42*C42+A43*C43+A44*C44+A45*C45+A46*C46
50	Retorno Esperado $E(R_B)$	R$ 840,90	=B42*D42+B43*D43+B44*D44+B45*D45+B46*D46

Usando as funções do Excel

Variância		
Desvio Padrão		

Desvio Padrão é importante?

Um importante atributo do desvio padrão como uma medida de espalhamento é que se a média e o desvio padrão de uma distribuição normal são conhecidos, é possível calcular o percentil associado com qualquer resultado dado. Numa distribuição normal, cerca de 68% dos resultados estão dentro de um desvio padrão da média e cerca de 95% dos resultados estão dentro de dois desvios padrões da média.

O desvio padrão tem sido comprovado uma medida extremamente útil do espalhamento em parte porque ele é matematicamente tratável. Muitas fórmulas de estatística inferencial usam o desvio padrão.

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

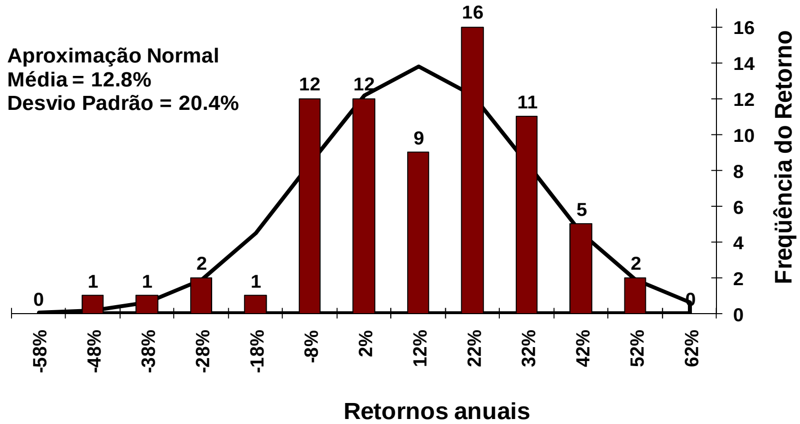
O conceito básico de probabilidade refere-se à possibilidade (ou chance), expressa normalmente em porcentagem, de ocorrer determinado evento. Por exemplo, uma previsão do tempo poderia dizer: "Há 40% de chance de chover hoje e 60% de chance de não chover". Se todos os eventos (ou resultados) possíveis, são relacionados, e se é atribuída uma probabilidade para cada evento, essa listagem é chamada de distribuição de probabilidades. Assim

Resultado (Evento)	Probabilidade
Chover	0,4 = 40%
Não Chover	0,6 = 60%
	1 =100%

As probabilidades também podem ser atribuídas aos resultados (ou retornos) possíveis de um investimento. Por exemplo, ao assumir uma probabilidade de 70% de que ocorra um fluxo de caixa de $ 800 em determinado período de projeto, está-se, na verdade, introduzindo um risco de 30% de que tal não se verifique (1 – 0,70), dada sua chance conhecida de 70%.

Vejamos a frequência (probabilidades) dos retornos da *S&P 500* (variável aleatória):

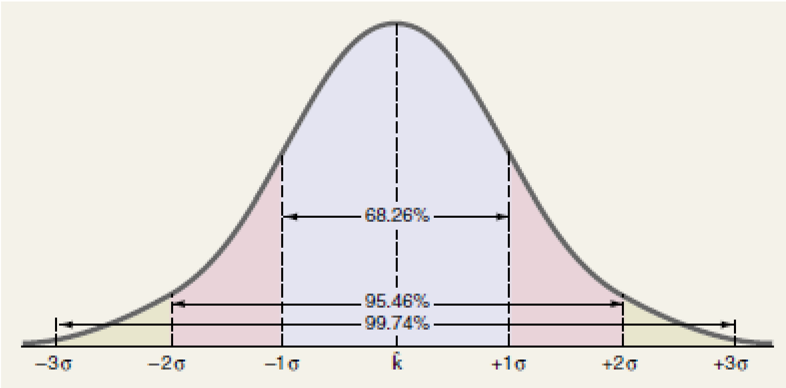
Freqüência dos Retornos da S&P 500



Fonte© *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 2000 Yearbook*™, Ibbotson Associates, Inc., Chicago (trabalho anualmente atualizado porRoger G. Ibbotson and Rex A. Sinquefield). All rights reserved.

Para diversos eventos aleatórios na natureza, determinada distribuição de probabilidades, é usada para descrever a probabilidade de se ter um valor dentro de um intervalo. Por exemplo, a idéia de dar notas em escala numa prova resulta do fato de que as notas de provas se assemelham frequentemente à curva da chamada distribuição normal.

A **distribuição normal** é simétrica em forma de sino, que é definida completamente pela média e pelo desvio-padrão.



A diferença nas duas figuras acima é que a primeira figura temos uma distribuição de apenas um número finito de observações, enquanto a segunda figura está baseada em um número infinito de observações.

A utilidade da distribuição normal consiste no fato de que ela pode ser completamente descrita pela média e pelo desvio-padrão. Se você tiver estes dois dados, não precisará conhecer mais nada

Uma variável estatística pode ser classificada como discreta ou contínua. Uma variável é discreta quando assume um número finito de valores e contínua quando assume um número infinito de valores.

Ao assumir valores infinitos é definida para a variável uma distribuição de probabilidades normal, representada por uma curva contínua e simétrica na forma de sino. Essa curva é chamada de curva normal ou curva de Gauss, em homenagem ao seu criador Johann Carl Friedrich Gauss.

Ela é amplamente usada em Finanças pelo fato da grande aproximação à curva normal dos retornos esperados e outros eventos financeiros.

Na distribuição contínua, o valor da probabilidade é calculada unicamente para determinado intervalo de valores. A equação da curva normal para esses cálculos é expressa da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Onde f(x) = frequência de determinado valor

$\bar{x}$ = média da distribuição

σ = desvio-padrão da distribuição

Felizmente, não é necessário processarem-se os cálculos dessa fórmula para se determinar as áreas sob a curva normal que ela gera. Seus resultados estão tabelados (ver Tabela abaixo)

Distribuição Normal – Valores $P(0 \leq Z \leq z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4965	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

Para utilizar essas tabelas de cálculo, é necessário determinar uma variável padronizada Z. Sua expressão de cálculo é a seguinte:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Onde Z é a variável padrão que significa o número de desvio-padrão existente a partir da média.

EXEMPLO

Considere um ativo (uma ação, por exemplo) que tenha retorno esperado de $E(R)$ = μ = 30% e risco (desvio-padrão) σ = 12%. Encontre o valor da **variável padrão** Z para R_1 = 30% e R_2 = 48%.

Solução

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30\% - 30\%}{12\%} = 0$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{48\% - 30\%}{12\%} = 1{,}50$$

LEITURA DA TABELA

A leitura desta tabela é feita identificando-se na primeira coluna z_0 as duas primeiras casas do valor de Z calculado, a terceira casa deve ser observada na coluna. Por exemplo, para um valor Z = 1,50, o valor da **área** estará na linha 1,5 (as duas primeiras casas de Z) e na coluna 0 (terceira decimal), que corresponderá a 0,4332.

No exemplo acima temos para Z = 0 o valor 0,00, e para Z = 1,50, o valor 0,4332. Isto significa que existem 43,32% de probabilidade da taxa de retorno R esperado do ativo situar-se entre 30% e 48%.

Cabe lembrar que a Tabela acima é válida também para valores negativos de Z, uma v ez que os seus valores são simétricos em relação à média.

EXEMPLO

Considere um ativo (uma ação, por exemplo) que tenha retorno esperado de $E(R)$ = μ = 30% e risco (desvio-padrão) σ = 12%. Encontre a **probabilidade** do retorno esperado deste ativo ficar entre 24% e 36%, no período.

Solução

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{24\% - 30\%}{12\%} = -0{,}500$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{36\% - 30\%}{12\%} = 0{,}500$$

O valor tabelado para Z = 0,500 é 0,1915, a direita e à esquerda, ou seja, positivo e negativo. Dessa forma a probabilidade será a soma das áreas do lado positivo e negativo [0,1915 – (-0,1915) =0,3830]. Assim, a probabilidade do retorno esperado do ativo ficar entre 24% e 36% , no período, é de 38,30% .

A DISTRIBUIÇÃO NORMAL NO EXCEL

Isso tudo poderia ser feito direto no Excel ....

EXERCÍCIOS

1. Uma empresa deseja realizar investimentos no mercado financeiro utilizando seus excedentes de caixa. O gerente financeiro selecionou dois ativos A e B, para serem analisados. O ativo A apresenta um retorno esperado de 20% e o desvio-padrão do retorno de 16%. O ativo B tem um retorno esperado de 26% e desvio-padrão do retorno de 25%. O gerente financeiro decidiu investir no ativo B. Analise a decisão de investimento tomada.

2. Abaixo, são apresentados os retornos esperados da ação de uma empresa de capital aberto e do mercado, considerando três cenários prováveis:

Cenários	Probabilidades	Retorno de mercado	Retorno da ação da empresa
Otimista	30%	24%	18%
Mais provável	50%	16%	12%
Pessimista	20%	6%	-3%

Pede-se apurar:
a. Retorno esperado da ação da empresa;
b. Retorno esperado do mercado;
c. Desvio-padrão e variância dos retornos da ação da empresa.

3. Determinar o desvio-padrão dos títulos A e B, cujos retornos e respectivas probabilidades são dados a seguir:

Título A		**Título B**	
Retorno	Probabilidades	Retorno	Probabilidade
8%	15%	5%	40%
10%	20%	10%	30%
11%	30%	15%	20%
18%	35%	22%	10

4. Calcular o retorno esperado, o desvio-padrão e o coeficiente de variação dos investimentos que oferecem os seguintes resultados e probabilidades:

Investimento A		**Investimento B**	
Retorno Esperado	Probabilidades	Retorno Esperado	Probabilidade
$ 300	25%	$ 600	26%
$ 400	25%	$ 700	23%
$ 500	18%	$ 200	19%
$ 450	22%	$ 100	15%
$ 200	10%	$ 150	17%

A TEORIA DE CARTEIRA (*PORTFOLIO*) DE MARKOWITZ

Até agora consideramos o grau de risco dos ativos tomados isoladamente! Agora vamos estudar o comportamento de uma carteira composta de vários ativos.

Uma **carteira** (*portfólio*, em inglês) é uma combinação de ativos, tais como investimentos, ações, obrigações, *commodities*, investimentos em imóveis, títulos com liquidez imediata ou outros ativos em que uma pessoa física ou jurídica possa investir e que possa manter. Acontece que o grau de risco de um ativo mantido como parte de uma carteira (portfólio), como veremos, é menor. Por isso, a maioria dos ativos financeiros é mantida como parte de carteiras. Os bancos, fundos de investimentos e de pensão, seguradoras, fundos mútuos, etc. têm carteiras bem diversificadas. Mas o que é, na verdade, uma *diversificação*? É o que veremos pormenorizadamente mais adiante. Antes, porém vamos a alguns conceitos preliminares e fundamentais para o entendimento de como a diversificação pode reduzir o risco total.

RETORNO ESPERADO DE UMA CARTEIRA

Define-se o **retorno esperado**[9] E(R) de uma *carteira* (portfólio) composta por vários ativos como a *média ponderada* do retorno esperado de cada ativo individual $E(R_k)$, em relação a sua participação[10] (peso) no total da carteira.

Para uma carteira constituída por *n* ativos, o retorno esperado da carteira é dado por:

$$\boxed{E(R_P) = \sum_{k=1}^{n} E(R_K)\ x\ Peso_K}$$

Uma maneira alternativa de se fazer os cálculos seria encontrarmos o *retorno observado* da carteira em cada estado por meio da média ponderada dos *n* ativos com o peso igual à participação de cada um na carteira. Depois, então, fazemos outra média ponderada desses retornos observados da carteira com o peso igual à probabilidade de ocorrência de cada estado j.

O retorno observado da carteira no estado j é:

$$R_{Carteira}^{Observado\ j} = \sum_{i=1}^{n} w_i\ .\ R_i$$

Onde w_i representa a participação (pesos) de cada um dos *n* ativos na carteira.

O valor esperado destes <u>retornos observados</u> da carteira nos *m* estados da natureza dará o **retorno esperado da carteira** propriamente dito:

$$\overline{R_C} = E\left(R_{Carteira}^{Observado\ j}\right) = \sum_{j=1}^{m} p_j\ .\ R_{Carteira}^{Observado\ j}$$

Onde p_j é a probabilidade de ocorrência do estado j.

Faremos isto nos exercícios.

[9] É a expectância.
[10] Percentuais do valor da carteira total correspondentes a cada ativo específico.

EXEMPLO 1

Admita uma carteira composta por duas ações (A e B). O retorno *esperado* da ação A, R_A, é de 20% e o da ação B, R_B, é de 40%. Suponha também que 40% da carteira estejam aplicados na ação A, sendo, portanto, os 60% restantes aplicados na ação B. Calcule o retorno esperado R_P desta carteira.

Solução

$E(R_P)$ = (peso de A) x $E(R_A)$ + (peso de B) x $E(R_B)$ = 0,40 x 20% + 0,6 x 40% = 8% + 24% = 32%.

Na HP-12C, temos:

f Σ 20 ENTER 0,40 Σ+ 40 ENTER 0,60 Σ+ g $\bar{x}_w$ 32%

Conclusão: Se a carteira fosse composta apenas pela ação A, o retorno esperado R_A seria 20%, subindo para 40% se ela fosse composta apenas da ação B. Assim o retorno esperado da carteira toda, 32%, depende da proporção investida em cada ativo que a compõe.

35				
36	participação no portfolio	40%	60%	
37	Retorno Esperado das Ações	20,00%	40,00%	
38	Retorno Esperado da Carteira	32,0%	=SOMARPRODUTO(B36:C36;B37:C37)	
39				
40				

EXEMPLO 2

O investidor Mr. Bolsa deseja montar uma carteira com dois ativos financeiros: ações A e ações B. Ele tem a expectativa dos *estados* j da economia e dos *retornos* R_i correspondentes dados por:

Estados da Economia	Probabilidade do Estado p_j	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado	
		Retornos Esperados da Ação A	Retornos Esperados da Ação B
Recessão	20%	10%	20%
Normal	60%	20%	40%
Crescimento	20%	30%	60%

a. Encontre para o Mr. Bolsa o *retorno esperado da carteira*, $\overline{Rc}$, composta com igual participação de ambas as ações.
b. Encontre para o Mr. Bolsa o *retorno esperado da carteira*, $\overline{Rc}$, composta com 20% de participação das ações A e 80% de participação das ações B.

Solução

Os cálculos na HP-12C é com você.

No Excel, a coisa fica assim:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
16											
17											
18	Estados da Economia	Probabilidade do Estado p_j	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado			Participações ou Pesos na Carteira					
19			Retornos Esperados da Ação A	Retornos Esperados da Ação B		Participação da Ação A	Participação da Ação B	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item a	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item b		
20	Recessão	20%	10%	20%	item a	50%	50%	15,00%	18,00%	=SOMARPRODUTO(C20:D20;$F$22:$G$22)	
21	Normal	60%	20%	40%				30,00%	36,00%	=SOMARPRODUTO(C21:D21;$F$22:$G$22)	
22	Crescimento	20%	30%	60%	item b	20%	80%	45,00%	54,00%		
23	Retornos Esperados de cada Título	Retorno esperado de cada Título i	20,00%	40,00%			Retorno Esperado da Carteira ⇒	30,00%	36,00%	=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;I20:I22)	
24		Retorno Esperado da Carteira	30,00%	36,00%	=SOMARPRODUTO(F22:G22;C23:D23)	Duas formas distintas de se fazer o mesmo cálculo !!!					
25											
26											

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

1. Retornemos ao caso das ações LMTC10 e UDNZ15 do exemplo 1 e suponha que você colocou metade do seu dinheiro em cada uma. Qual o *retorno esperado* desta carteira para dois estados da economia: crescimento (probabilidade = 20%) e recessão (probabilidade = 80%).

Sugestão: Calcule os retornos esperados de cada ação nos dois estados da economia e depois calcule a média ponderada (50% de cada um) dos ativos na carteira para encontrar o retorno esperado da carteira.

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
73									
74									
75	Estados da Economia	Probabilidades dos Estados	Retorno dos Títulos de Acordo com o						
76			Resultados Esperados da Ação LMTC10	Resultados Esperados da Ação UDNZ15	As células com os dados foram formatadas para geral e porcentagem				
77	Crescimento	0,20	70%	30%					
78	Recessão	0,80	-20%	10%					
79									
80			maneira 1		maneira 2				
81	Retorno Esperado $E(R_A)$	-2%	=B3*C3+B4*C4		=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;$C$3:$C$5)				
82	Retorno Esperado $E(R_B)$	14%	=B3*D3+B4*D4		=SOMARPRODUTO($B$3:$B$4;$D$3:$D$4)				
83									
84	participação no portfolio	50%	50%						
85	Retorno Esperado das Ações	-2,00%	14,00%						
86	Retorno Esperado da Carteira	6,0%	=SOMARPRODUTO(B84:C84;B85:C85)						
87									
88									

2. Considere os portfolios seguintes e seus respectivos retornos (em porcentagem) durante os últimos seis meses.

A		
ValorInicial	Retorno(%)	Valor Final
1.000	0,75	1.008
1.008	1,00	1.018
1.018	3,00	1.048
1.048	-1,50	1.032
1.032	0,50	1.038
1.038	2,00	1.058

B		
ValorInicial	Retorno(%)	Valor Final
1.000	1,50	1.015
1.015	5,00	1.066
1.066	12,00	1.194
1.194	-9,00	1.086
1.086	-4,00	1.043
1.043	1,50	1.058

Ambos os portfólios terminam o período aumentando em valor de $1.000 para $1.058. Entretanto, eles diferem claramente na volatilidade. Os retornos mensais do Portfólio A variam de -1,5% a 3,0% enquanto os do Portfólio B variam de -9,0% a 12,0%.

O desvio padrão dos retornos é uma medida melhor da volatilidade daquele intervalo porque ele leva em conta todos os valores. Assim o desvio padrão dos seis retornos para o Portfólio A é 1,52; para o Portfolio B é 7,24.

EXERCÍCIOS

1. Quais são os pesos de uma carteira com 50 ações que estão sendo negociadas a $ 45 cada uma e 30 ações vendidas a $ 65 cada?
2. Você tem uma carteira com $ 1.000 investidos na ação A e $ 2.000 na ação B. Se os retornos esperados destas ações forem 18% e 12%, respectivamente, qual será o retorno esperado da carteira?
3. Você possui uma carteira que tem 40% investidos na ação X, 35% na ação Y e 25% na ação Z. Os retornos esperados dessas três ações são iguais a 10%, 16% e 23%, respectivamente. Qual é o retorno esperado dessa carteira?
4. Você tem $ 100.000 para aplicar em uma carteira de ações. Suas opções são a ação H, com retorno esperado de 20% e a ação L, com retorno esperado de 12%. Sendo seu objetivo criar uma carteira com retorno esperado de 17%, quanto dinheiro você deveria investir na ação H? E na ação L?
5. Uma carteira tem 40% investidos na ação G, 40% na ação J e 20% na ação K. Os retornos esperados dessas ações são iguais a 12%, 18% e 34%, respectivamente. Qual é o retorno esperado da carteira? Como você interpreta a sua resposta?

VARIÂNCIA DE UMA CARTEIRA

A **variância** de uma *carteira* (portfólio) de *n* ativos é simplesmente o valor esperado (ou expectância) dos quadrados dos desvios dos retornos observados da carteira em torno do retorno do retorno esperado da carteira:

$$\sigma^2_{portfólio} = E(R_P - \bar{R}_P)^2$$

$$\boxed{\sigma^2_{portfólio} = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{R}_i\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R}_i) w_i\right)^2}$$

Onde os w_i são as participações dos ativos na carteira.

Pode-se demonstrar para o caso de *n* ativos que esta expressão fica:

$$\sigma^2_{portfólio} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \ .\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_i w_j \, \sigma_{ij}$$

Aqui w_i e w_j são as participações dos ativos *i* e *j* na carteira, σ_i^2 é a variância do ativo *i* e σ_{ij} é a covariância dos ativos *i* e *j*.

Para o caso de uma carteira com 3 ativos, esta expressão se reduz a:

$$\sigma^2_{portfólio} = \sum_{i=1}^{3} w_i^2 \ .\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} w_i w_j \, \sigma_{ij}$$

$$\sigma^2_{portfolio} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2\,w_1w_2\sigma_{12} + 2\,w_1w_3\sigma_{13} + 2\,w_2w_3\sigma_{23}$$

O símbolo ≠ indica que i deve ser diferente. Tem-se também que: $\sigma_{12} = \sigma_{21}$; $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ e $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Estas são as covariâncias entre os ativos *i* e *j* que veremos a seguir.

Lembrando que a raiz quadrada da variância nos dá o desvio padrão.

Podemos, ainda, escrever a variância de uma carteira com *n* ativos na forma matricial:

$$\sigma^2_{portfolio} = [w_1 \quad w_2 \cdots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Sendo σ_{ii}^2 as variâncias do ativo *i* e σ_{ij} as covariâncias entre *i* e *j*.

A matriz central é chamada de matriz variâncias-covariâncias. É uma matriz quadrada composta ao todo por n^2 elementos. Como a sua diagonal está formada pelas variâncias dos ativos (n variâncias), o número de covariâncias será igual ao número total de elementos menos o número de variâncias, isto é, $n^2 - n$ elementos.

EXEMPLO

As distribuições de probabilidades das taxas de retorno para três empresas, a Capivara Co., a Berts Co., e a Guaraná Brasil Co., estão mostradas abaixo:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Retorno dos títulos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Capivara Co.	Resultados esperados da Berts Co.	Resultados esperados da Guaraná Brasil Co.
Expansão	0,30	100%	20%	50%
Normal	0,40	15%	15%	15%
Recessão	0,30	(70%)	10%	0

Encontre:

a. O retorno esperado, o desvio padrão e a variância de uma carteira com um montante igual investidos em cada uma das três empresas.
b. O retorno esperado, o desvio padrão e a variância da carteira, se metade do investimento total tivesse sido na *Capivara Co* e o restante dividido igualmente entre a *Berts Co.* e a *Guaraná Brasil Co.*

Solução

O retorno esperado, para os 3 estados da economia, de cada ativo da carteira será:

$E(R_{capivara}) = 0,3 \times 100\% + 0,4 \times 15\% + 0,3 \times (-70\%) = 30+6+(-21)= 15\%$

$E(R_{berts}) = 0,3 \times 20\% + 0,4 \times 15\% + 0,3 \times 10\% = 6+6+3= 15\%$

$E(R_{guaraná}) = 0,3 \times 50\% + 0,4 \times 15\% + 0,3 \times 0 = 15+6= 21\%$

a. O retorno esperado da <u>carteira</u> com **igual** montante investidos em cada uma das três empresas:
$E(R_{carteira}) = 1/3 \times 15\% + 1/3 \times 15\% + 1/3 \times 21\% = 5\% + 5\% + 7\% = 17\%$

Outra maneira de fazer este cálculo seria:

Expansão...$E(R_{carteira}) = 1/3 \times 100\% + 1/3 \times 20\% + 1/3 \times 50\% = 1/3 \times 170\%$

Normal...$E(R_{carteira}) = 1/3 \times 15\% + 1/3 \times 15\% + 1/3 \times 15\% = 1/3 \times 45\%$

Recessão...$E(R_{carteira}) = 1/3 \times (-70\%) + 1/3 \times 10\% + 1/3 \times 0\% = -1/3 \times 60\%$

Para os três estados da economia, teríamos o retorno esperado da carteira com igual montante investidos em cada uma das três empresas:

$E(R_{carteira}) = 0,3 \times 1/3 \times 170\% + 0,4 \times 1/3 \times 45\% + 0,3 \times (-1/3 \times 60\%) =$
$= 17 + 6 -6 = 17\%$

A simples intuição poderia sugerir que a variância de uma carteira é uma combinação simples das variâncias dos ativos componentes da carteira. Assim, a variância esperada da carteira com igual montante investidos em cada uma das três empresas seria:

$Var(R_{carteira}) = 1/3 \times (0,15 - 0,17)^2 + 1/3 \times (0,15 - 0,17)^2 + 1/3 \times (0,21 - 0,17)^2 = 0,000133 + 0,000133 + 0,000533 = 0,000799$

Isto é, a variância dos retornos esperados de cada empresa daquele da carteira, ponderado pela participação de cada empresa na carteira. Infelizmente, essa abordagem está completamente errada!

A verdadeira variância é calculada como segue

$Var(R_{carteira}) = 0,3 \times (1/3 \times 0,17 - 0,17)^2 + 0,4 \times (0,15 - 0,17)^2 + 0,3 \times (-0,20 - 0,17)^2 = 0,3 \times 0,0128 + 0,4 \times 0,0004 + 0,3 \times 0,1369 = 0,00384 + 0,00016 + 0,04107 = 0,04507$

O desvio padrão é dado por

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,04507} = 0,212297$ ou 21,23%

b. O retorno esperado da <u>carteira</u> com **metade do investimento na Capivara e o restante na Berts e na Guaraná Brasil** será:
$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 15\% + 0,25 \times 15\% + 0,25 \times 21\% = 7,5\% + 3,75\% + 5,25\% = 16,5\%$

Outra maneira de fazer este cálculo seria:

Expansão...$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 100\% + 0,25 \times 20\% + 0,25 \times 50\% = 67,5\%$

Normal...$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 15\% + 0,25 \times 15\% + 0,25 \times 15\% = 15\%$

Recessão...$E(R_{carteira}) = 0,5 \times (-70\%) + 0,25 \times 10\% + 0,25 \times 0\% = -32,5\%$

Para os três estados da economia, teríamos o retorno esperado da carteira com igual montante investidos em cada uma das três empresas:

$$E(R_{carteira}) = 0,3 \times 67,5 + 0,4 \times 15\% + 0,3 \times (-32,5\%) = 20,25 + 6 - 9,75 = 16,5\%$$

A verdadeira variância é calculada como segue

$$Var(R_{carteira}) = 0,3 \times (0,675 - 0,165)^2 + 0,4 \times (0,15 - 0,165)^2 + 0,3 \times (-0,325 - 0,165)^2 = 0,3 \times 0,2601 + 0,4 \times 0,000225 + 0,3 \times 0,2401 = 0,07803 + 0,00009 + 0,07203 = 0,15015$$

O desvio padrão é dado por

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,15015} = 0,387492 \text{ ou } 38,75\%$$

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Probabilidade do Estado	Retorno dos Títulos de Acordo com o Estado			Participações ou Pesos na Carteira						
2		Retornos Esperados da Capivara Co.	Retornos Esperados da Berts Co.	Retornos Esperados da Guaraná Brasil Co.		Participação 1 da Capivara Co.	Participação 1 da Berts Co.	Participação 1 da Guaraná Brasil Co.	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item a	Retorno da Carteira no Estado j e Participação item b	
3	0,3	100%	20%	50%	item a	0,333333333	0,333333333	0,333333333	56,67%	67,50%	=SOMARPRODUTO(C3:E3;$G$5:$I$5)
4	0,4	15%	15%	15%					15,00%	15,00%	
5	0,3	-70%	10%	0%	item b	0,5	0,25	0,25	-20,00%	-32,50%	=SOMARPRODUTO(C5:E5;$G$5:$I$5)
6	Retorno esperado de cada Título i	15,00%	15,00%	21,00%				Retorno Esperado da Carteira ⇒	17,00%	16,50%	=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;K3:K5)
7	Retorno Esperado da Carteira	17,00%	16,50%	=SOMARPRODUTO(G5:I5;C6:E6)		Duas formas distintas de se fazer o mesmo cálculo !!!					
8	Variância da Carteira	0,08843	0,15015	=SOMARPRODUTO($B$3:$B$5;K10:K12)							
9	Desvio Padrão da Carteira	29,74%	38,75%	=RAIZ(D8)					Tabela Auxiliar		
10								=(J3-$J$6)^2	15,73%	26,01%	=(K3-$K$6)^2
11									0,04%	0,02%	
12									13,69%	24,01%	
13											
14											
15											

EXERCÍCIOS

1. Dadas as informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado	
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B
Recessão	0,10	-0,20	0,30
Normal	0,60	0,10	0,20
Crescimento	0,30	0,70	0,50

Com os retornos esperados $E(R_A) = 25\%$ e $E(R_B) = 30\%$; variâncias $\sigma_A^2 = 0,0945$ e $\sigma_B^2 = 0,0180$ e desvios-padrões $\sigma_A = 30,74\%$ e $\sigma_B = 13,42\%$. Suponha que você disponha de $ 20.000, no total. Se você tivesse aplicado $ 6.000 na ação A e o restante na ação B, quais teriam sido o retorno esperado e o desvio-padrão de sua carteira? Respostas: $E(R_P) = 28,50\%$; a variância $\sigma_P^2 = 0,03245$ e desvio-padrão $\sigma = 18,01\%$.

2. Considere as seguintes informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B	Resultados esperados da Ação C
Expansão	0,65	0,14	0,18	0,26
Recessão	0,35	0,08	0,02	-0,02

a. Qual é o retorno esperado de uma carteira composta por essas três ações com pesos iguais?
b. Qual a variância de uma carteira que tem 25% investidos em A e B e 50% investidos em C?

3. Considere as seguintes informações:

Estados da Economia	Probabilidade do estado	Taxa de Retorno dos Ativos de acordo com o Estado		
		Resultados esperados da Ação A	Resultados esperados da Ação B	Resultados esperados da Ação C
Expansão	0,20	0,11	0,35	0,18
Bom	0,50	0,06	0,15	0,11
Mau	0,25	0,04	-0,05	0,02
Recessão	0,05	0,00	-0,40	0,06

a. Sua carteira tem 30% investidos nas ações B e C e 40% na ação A. Qual é o retorno esperado da carteira?
b. Qual é a variância da carteira? E o desvio-padrão?

CONCLUSÕES

Anteriormente, estudamos o risco de apenas um ativo. A orientação formulada na análise de risco de uma carteira composta por **n** ativos é selecionar alternativas que levem à melhor *diversificação* e, consequentemente, redução do risco dos investimentos e, produza, ao mesmo tempo, um retorno admitido como aceitável no âmbito dos investidores de mercado.

Entende-se por **diversificação** a estratégia destinada à redução do risco de uma carteira pela diluição do capital em muitos ativos. Para exemplificar, uma empresa que mantenha produtos direcionados a diferentes mercados consumidores, pode compensar eventuais prejuízos em alguns produtos por resultados favoráveis em outros.

O risco de uma carteira é eliminado quando os investimentos apresentarem comportamentos opostos. Para entendermos melhor isto, vamos às outras medidas estatísticas.

COVARIÂNCIA DE CARTEIRAS COM DOIS ATIVOS

As medidas estatísticas que procuram relacionar duas variáveis aleatórias com objetivo de identificar o comportamento das mesmas são a *covariância* e a *correlação*.

A covariância procura identificar como os valores se correlacionam entre si. Em outras palavras, medem como X e Y, movimentam-se ao mesmo tempo em relação a seus valores médios.

A expressão de cálculo da covariância é

$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_X - \bar{R}_X)(R_Y - \bar{R}_Y)}{N-1} \quad \text{...para amostras}$$

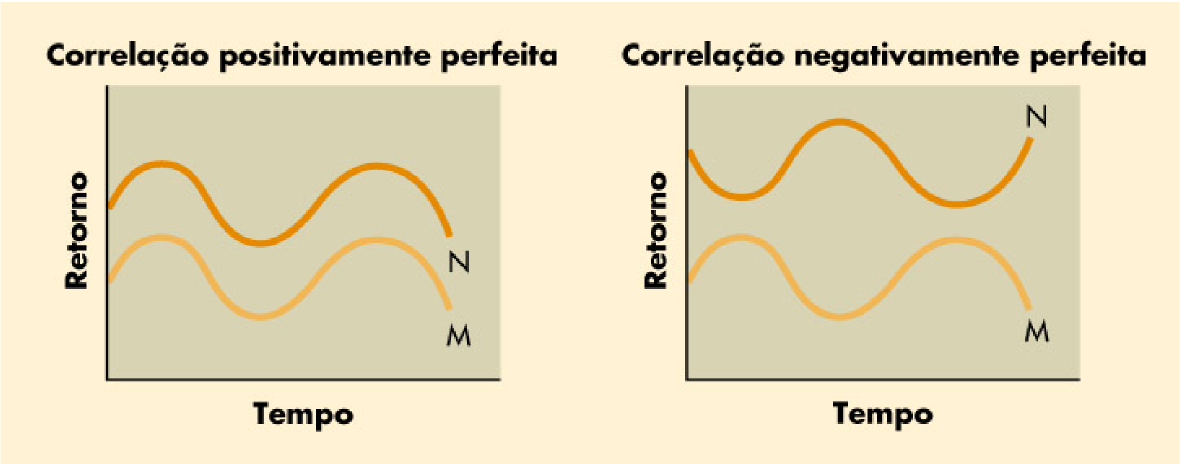
$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(R_X - \bar{R}_X)(R_Y - \bar{R}_Y)}{N} \quad \text{...para população}$$

O valor real da covariância não é significante porque ele não é afetado pela a escala das duas variáveis. Isto é o porquê de se calcular o coeficiente de correlação (que veremos posteriormente) – para tornar algo interpretável da informação da covariância.

Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for positiva ($COV_{X,Y} > 0$), significa que os retornos esperados apresentam a mesma tendência, isto é, o desempenho de um acompanha o do outro. A valorização de um reflete tendência de valorização do outro, e vice-versa. Neste caso, diz-se que os ativos são *positivamente correlacionados*.

Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for negativa ($COV_{X,Y} < 0$), significa que os retornos esperados apresentam relações inversas. Assim, se o retorno de um deles aumentar o do outro diminuirá.

Se a $COV_{X,Y}$ dos ativos X e Y for nula ($COV_{X,Y} = 0$), significa que não existe associação alguma entre os dois ativos



A covariância resume num único número a tendência e a força da relação linear entre 2 variáveis.

EXEMPLO

Considere o retorno do Ibovespa e da taxa de câmbio nos últimos cinco anos no Brasil dada por:

Ano	Dólar (X)	Ibovespa(Y)	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})x(Y - \bar{Y})$
2002	24,6%	-17%	25,2%	-48,7%	-12,3%
2003	4,8%	97,30%	5,3%	65,6%	3,5%
2004	-4,7%	17,80%	-4,2%	-13,9%	0,6%
2005	-16,8%	27,70%	-16,3%	-4,0%	0,7%
2005	-10,6%	32,90%	-10,0%	1,2%	-0,1%
Média	$\bar{X} = -0,5\%$	$\bar{Y} = 31,7\%$			SOMA = -7,63%

Calcule a $COV_{X,Y}$.

Solução

$$COV_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X - \bar{X})x(Y - \bar{Y})}{N} = \frac{-7,63\%}{5} = -1,526\%$$

A covariância calculada entre o Ibovespa e o dólar é negativa, indicando associação inversa entre os ativos. A tendência esperada é o retorno de um ativo se valorizar acima do seu valor médio quando o resultado de outro ficar abaixo.

Como aconteceu com os ativos do exemplo acima, com COV < 0, haverá uma redução no risco de uma carteira contendo apenas eles dois. Ocorrendo a desvalorização de um ativo, é esperada a valorização do outro. A essa situação dá-se o nome de HEDGING.

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

Vamos agora nos concentrar à correlação simples[11], tratando de apenas duas variáveis.

A medida da intensidade da relação entre as variáveis aleatórias dispostas por meio de valores de X e Y, pelo coeficiente de correlação[12], que varia de -1 a +1.

$$\text{coef. correlação} = \frac{\text{covariância entre x e y}}{\begin{pmatrix}\text{Desvio padrão}\\ \text{de x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Desvio padrão}\\ \text{de y}\end{pmatrix}}$$

$$r_{X,Y} = \frac{COV_{X,Y}}{s_X\, s_Y} \text{ .....para amostras}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV_{X,Y}}{\sigma_X\, \sigma_Y} \text{ ....para populações}$$

Vale a pena ressaltar que a divisão da covariância pelo produto dos desvios padrão não modifica as suas propriedades; simplesmente a normaliza para que assuma valores entre -1 e +1.

EXEMPLO

Considere o retorno do Ibovespa e da taxa de câmbio nos últimos cinco anos no Brasil dada por:

Ano	Dólar (X)	Ibovespa(Y)	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})x(Y - \bar{Y})$
2002	24,6%	-17%	25,2%	-48,7%	-12,3%
2003	4,8%	97,30%	5,3%	65,6%	3,5%
2004	-4,7%	17,80%	-4,2%	-13,9%	0,6%
2005	-16,8%	27,70%	-16,3%	-4,0%	0,7%
2005	-10,6%	32,90%	-10,0%	1,2%	-0,1%
Média	$\bar{X}$ = -0,5%	$\bar{Y}$ = 31,7%	SOMA=10,44%	SOMA=68,86%	SOMA = -7,63%

Calcule o coeficiente de correlação

Solução

$$r_{X,Y} = \frac{-7{,}63\%}{\sqrt{10{,}44\%}\sqrt{68{,}86\%}} = -0{,}28464$$

[11] Quando se relacionam apenas duas variáveis. Quando se relacionam mais de duas variáveis, tem-se a correlação múltipla

[12] A correlação não implica que um causa o outro. Podemos dizer que duas variáveis X e Y estão correlacionadas, mas não que X causa Y ou que Y causa X, na média – eles simplesmente estão relacionados ou associados um com o outro.

Investimentos em ativos com coeficientes de correlação semelhantes não contribuem para redução do risco total, visto que todos eles convergem para ganhos quando a situação econômica lhes for favorável, e para perdas e, épocas desfavoráveis. Para redução do risco de carteiras de investimentos, é importante selecionar ativos com diferentes magnitudes de correlação. Ao diversificar a natureza das aplicações, o risco do portfólio reduz-se, sendo os prejuízos eventualmente apurados no setor absorvidos por somente uma parte das aplicações realizadas, e não pelo seu total.

O tipo de relação está representado pelo coeficiente de correlação:

$r = +1$ correlação perfeitamente positiva

$0 < r < +1$ relação positiva

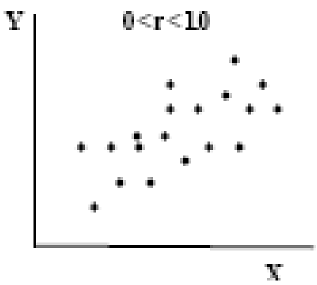
$r = 0$ nenhuma relação

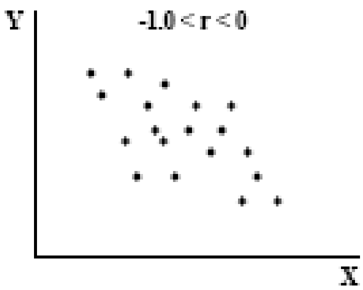
$-1 < r < 0$ relação negativa

$r = -1$ correlação perfeitamente negativa

Você pode determinar o grau de correlação observando o gráfico de espalhamento.

- Se a relação é para cima existe **correlação positiva**.
- Se a relação é para baixo existe **correlação negativa**.





O coeficiente de correlação está limitado por –1 e +1. Quanto mais próximo o coeficiente estiver de –1 ou +1, mais forte é a correlação.

EXEMPLO

Suponhamos que os retornos de dois ativos durante 10 meses sejam dados como a 2ª e 3ª coluna da tabela a seguir. Quais os valores de $x_{Médio}$, $y_{Médio}$, das variâncias s_x^2, s_y^2 e do coeficiente de correlação $r_{X,Y}$?

Observação	x	y	Desvio de x $x - x_{Médio}$	Desvio Quadrado de x $(x - x_{Médio})^2$	Desvio de y $y - y_{Médio}$	Desvio Quadrado de y $(y - y_{Médio})^2$	Produto dos desvios $(x - x_{Médio})(y - y_{Médio})$
1	12	50	-1,50	2,25	8,40	70,56	-12,60
2	13	54	-0,50	0,25	12,40	153,76	-6,20
3	10	48	-3,50	12,25	6,40	40,96	-22,40
4	9	47	-4,50	20,25	5,40	29,16	-24,30
5	20	70	6,50	42,25	28,40	806,56	184,60
6	7	20	-6,50	42,25	-21,60	466,56	140,40
7	4	15	-9,50	90,25	-26,60	707,56	252,70
8	22	40	8,50	72,25	-1,60	2,56	-13,60
9	15	35	1,50	2,25	-6,60	43,56	-9,90
10	23	37	9,50	90,25	-4,60	21,16	-43,70
Soma	135	416	0,00	374,50	0,00	2342,40	445,00

Cálculos

$x_{Médio}$= 135/10 = 13,5

$y_{Médio}$= 416/10 = 41,6

s^2_x= 374,5/9 = 41,611

s^2_y= 2.342,4/9 = 260,267

r = $(445/9)/((41,611)^{1/2}(260,267)^{1/2})$ = 49,444/(6,451*16,133) = 0,475

DIVERSIFICAÇÃO DE ATIVOS NA CARTEIRA

O risco de uma carteira é eliminado quando os investimentos apresentarem comportamentos opostos, ou seja, coeficiente de correlação igual a -1. Um resultado negativo de um investimento é perfeitamente compensado pelos lucros do outro, como vimos acima.

A existência de aplicações perfeita e negativamente correlacionadas indica a formação de carteiras com investimentos que produzem retornos inversamente proporcionais, isto é, quando o retorno de um deles decrescer, o retorno do outro ativo se elevará na mesma intensidade, anulando os reflexos negativos produzidos.

Em resumo, o objetivo básico do estudo de carteiras de ativos, de acordo com a moderna teoria do portfólio, é selecionar a carteira definida como ótima com base no critério de investimento proposto, ou seja:

- Selecionar a carteira que oferece o maior retorno possível para determinado grau de risco; ou, de forma idêntica;
- Selecionar a carteira que produza o menor risco possível para determinado nível de retorno esperado.

A ideia fundamental inserida nessa teoria do portfólio é que o risco particular de um único ativo é diferente de seu risco quando mantido em carteira. Uma grande vantagem das carteiras é que elas permitem que se reduza o risco mediante um processo de diversificação dos ativos que as compõem.

Como já foi insistentemente dito, o risco de um ativo qualquer é medido pelo grau de dispersão dos retornos em relação à média e, portanto, a medida estatística usualmente adotada para quantificar o risco de um ativo é o desvio-padrão.

Por meio da diversificação, é possível esperar que ativos com risco possam ser combinados numa carteira de forma que se apure um risco menor do que aquele calculado para cada um de seus componentes. No entanto, isto ocorre até certo limite, sendo impraticável a eliminação total do risco da carteira. Isto é explicado pela enorme dificuldade em encontra-se na prática investimentos com correlação perfeitamente negativa.

O que se consegue é minimizar o risco e não eliminá-lo.

Há duas classes importantes de risco associadas a um ativo:

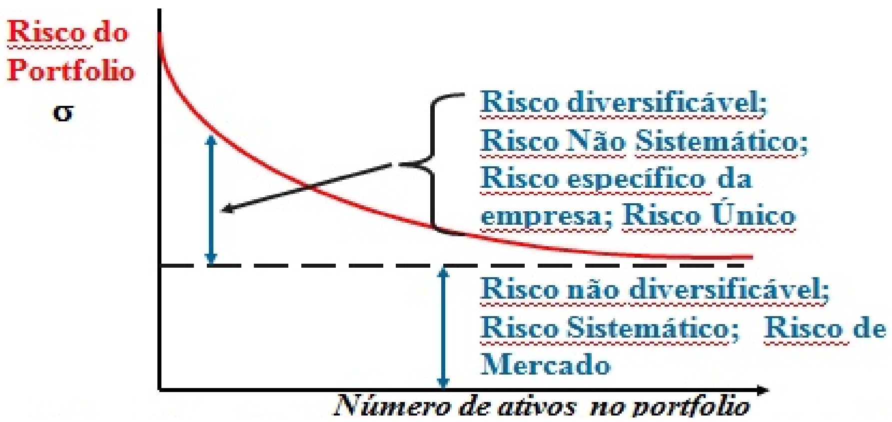
- Risco sistemático, ou não diversificável, e
- Risco diversificável, ou não sistemático.

RISCO SISTEMÁTICO ou CONJUNTURAL OU NÃO DIVERSIFICÁVEL

Está presente em todos os ativos negociados no mercado, sendo determinado por eventos de ordem política, econômica e social, por exemplo, inflação, crises políticas, desequilíbrios conjunturais, etc.. Não há como evitá-lo, porém, mediante a diversificação da carteira de ativos, é possível reduzi-lo.

RISCO NÃO SISTEMÁTICO ou CARACTERÍSTICO ou DIVERSIFICÁVEL

É a componente do risco total que pode ser total ou parcialmente diluído de uma carteira através da combinação de ativos que não possuam correlação positiva entre si (como veremos mais adiante). Por exemplo, comumente as carteiras diversificadas contêm títulos de renda fixa e de renda variável, os quais sofrem impactos diferentes de medidas de política econômica, como elevação das taxas de juros; ações de empresas cíclicas (montadoras de veículos, empresas de construção civil), de maior risco, são frequentemente combinadas com ações de empresas cujos negócios são menos afetados por flutuações econômicas, como indústria de alimentos. Este tipo de risco está diretamente relacionado com as características específicas do título ou da empresa. Por exemplo, uma carteira como a Bovespa pode não conter risco diversificável.



Observe que, conforme se amplia a *diversificação* da carteira por meio da inclusão de mais títulos, seu **risco total** decresce em função da eliminação do risco *não sistemático* (diversificável). Esse processo é, conforme colocado, limitado pela presença do risco *sistemático*, comum a todos os títulos. A partir de certo número de títulos, o risco da carteira se mantém praticamente estável, correspondendo unicamente a sua parte não diversificável ou sistemática.

Assim num portfólio grande os termos da variância são efetivamente diversificados, mas os termos da covariância não são.

EXEMPLO

Admita os seguintes retornos dos ativos X e Y para os cenários considerados

Estados da	Probabilidade do	Retorno dos Ativos

Economia	estado	Ativo X	Ativo Y
Expansão	0,30	28%	8%
Normal	0,40	14%	12%
Recessão	0,30	(4%)	7%

Calcule:

a. O retorno esperado de cada ativo;
b. O retorno esperado de uma carteira composta de partes iguais dos ativos;
c. O desvio padrão e a variância dos retornos de cada ativo;
d. O desvio padrão da carteira do item b.

Solução

a. Retorno esperado de cada ativo:
$E(R_X) = 0,3 \times 28\% + 0,4 \times 14\% + 0,3 \times (-4\%) = 12,8\%$
$E(R_Y) = 0,3 \times 8\% + 0,4 \times 12\% + 0,3 \times 7\% = 9,3\%$
b. $E(R_{carteira}) = 0,5 \times 12,8\% + 0,5 \times 9,3\% = 11,05\%$
c. A variância dos ativos:
$\sigma_X^2 = 0,3 \times (28,0 - 12,8)^2 + 0,4 \times (14,0 - 12,8)^2 + 0,3 \times (-4,0 - 12,8)^2 = 154,56$
$\sigma_Y^2 = 0,3 \times (8,0 - 9,3)^2 + 0,4 \times (12,0 - 9,3)^2 + 0,3 \times (7,0 - 9,3)^2 = 5,01$
$\sigma_X = 12,43\%$
$\sigma_X = 2,24\%$
d. $E(R_{carteira}) = 0,5 \times 28\% + 0,5 \times 8\% = 18\%$ no estado de expansão
$E(R_{carteira}) = 0,5 \times 14\% + 0,5 \times 12\% = 13\%$ no estado normal
$E(R_{carteira}) = 0,5 \times (-4\%) + 0,5 \times 7\% = 1,3\%$ no estado de recessão
$\sigma^2_{carteira} = 0,3 \times (18\% - 11,05\%)^2 + 0,4 \times (13\% - 11,05\%)^2 + 0,3 \times (1,3\% - 11,05\%)^2 = 44,53$

$\sigma_{carteira} = [44,53]^{1/2} = 6,67\%$

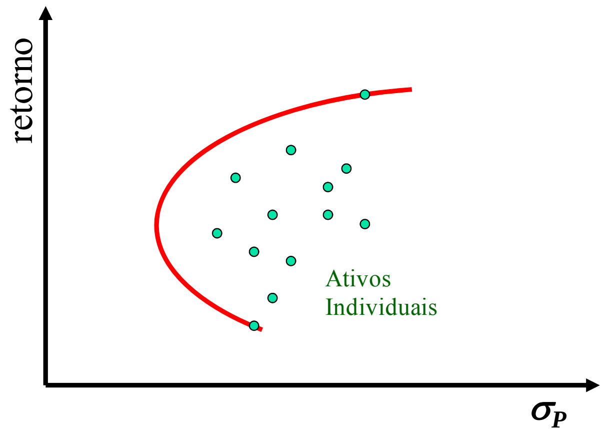
Para apurarmos o risco da carteira com base na ponderação dos retornos de cada ativo, precisamos incorporar em seus resultados a covariância dos ativos, isto é, para o cálculo do risco de carteira, é necessário levar em consideração não somente a participação e o risco de cada ativo individualmente, mas também como os ativos se correlacionam.

MODELO DE MARKOWITZ

O conceito mais moderno de diversificação e quantificação do risco de portfólio é atribuído, em grande parte, a Henry Markowitz, cuja essência de seu estudo é concentrada na famosa obra *Portfólio Selection:efficient diversification of investments*, editada em 1959 pela *John Wiley*. Merecidamente foi concedido a ele o prêmio Nobel de Economia em 1999.

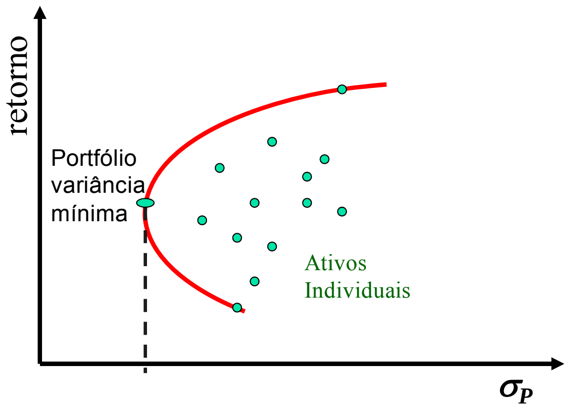
A teoria do portfólio trata essencialmente da composição de uma carteira **ótima** de ativos, tendo por objetivo principal maximizar a *utilidade* (grau de satisfação) do investidor pela relação risco/retorno. Apesar de a ideia da diversificação de investimentos – refletida no dito popular "Não coloque todos os ovos em uma mesma cesta" – não ser algo novo, foi Markowitz quem a formalizou e a aplicou aos instrumentos financeiros. Ele partiu da premissa de que a decisão sobre a composição de uma carteira de investimentos está fundamentada apenas no *valor esperado* e no *desvio padrão* dos **retornos da carteira**, e que essa decisão é consequência de um processo de minimização de risco (minimização de desvio-padrão).

Visto que os investimentos com risco caracterizam-se pela média dos retornos (ou retornos esperados) e pelo desvio padrão da distribuição probabilística dos retornos, esses parâmetros podem ser representados graficamente sobre dois eixos: *retorno esperado* e *desvio padrão*. Assim, considere um mundo com muitos ativos arriscados:

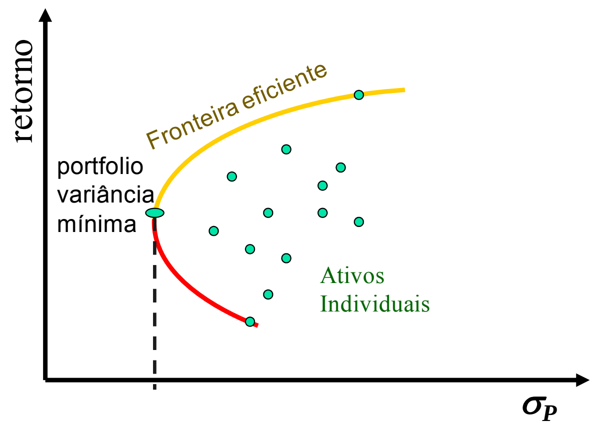


Neste gráfico podemos identificar a linha vermelha e contínua como o **conjunto oportunidade** (*opportunity set*) das várias combinações de carteiras. Nela estão as carteiras que para um dado retorno apresentam o menor desvio padrão.

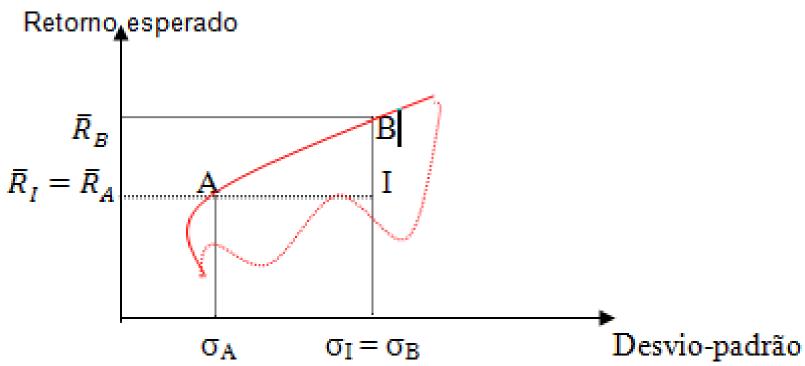
Dado o conjunto oportunidade podemos identificar o portfólio de *variância mínima*:



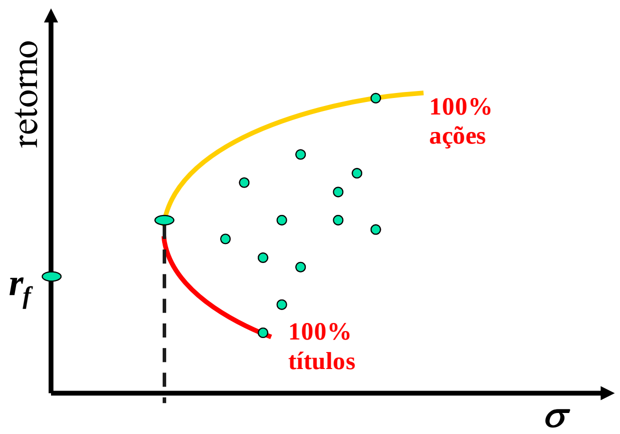
A seção do conjunto oportunidade acima do portfólio de variância mínima é chamada de **fronteira eficiente** e as carteiras sobre ela foram chamadas por Markowitz de **carteiras eficientes**. Elas proporcionam o maior retorno, com menor risco, dentre todas as carteiras.



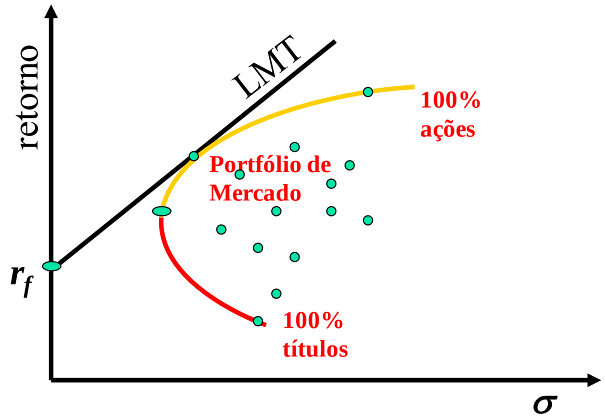
Diz-se que um ativo com risco **domina** outro quando, para o mesmo nível de risco, apresenta retorno esperado maior (no gráfico abaixo, B domina o I), ou quando, para o mesmo nível de retorno esperado, apresenta risco menor (no gráfico abaixo, A domina o I). Para um dado nível de risco, uma combinação situada na superfície da curva (carteira B) domina qualquer outra situada no espaço interno (carteira I), pois proporciona um retorno maior para o mesmo nível de risco.



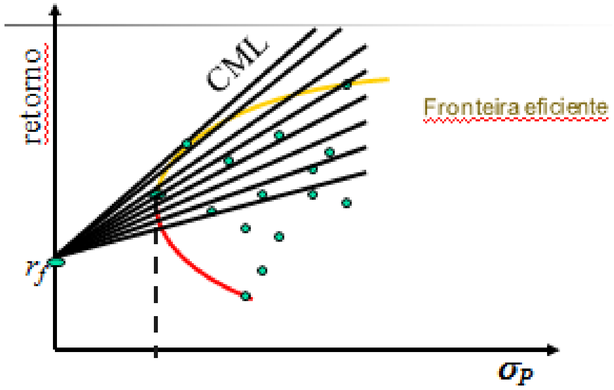
Além das ações e títulos, considere um mundo que também tenha títulos livres de risco como os *T-bills*.



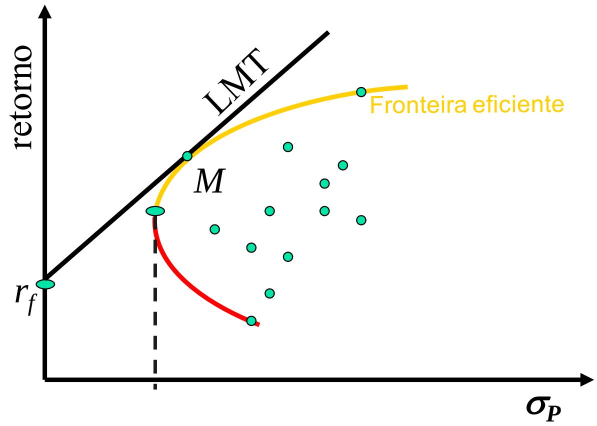
Agora os investidores podem alocar seu dinheiro entre *T-bills* e o portfólio de mercado



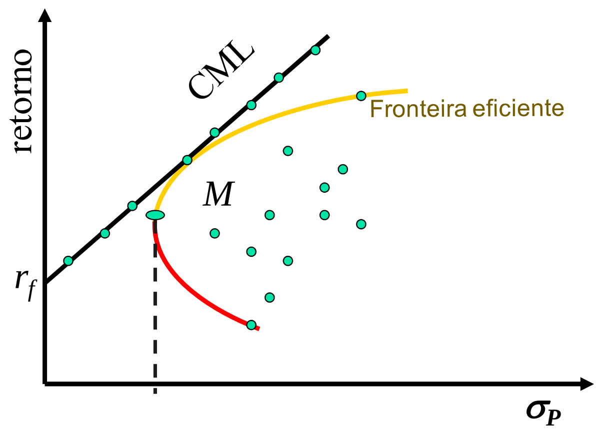
Com um ativo livre de risco disponível e a fronteira eficiente identificada, escolhemos a linha de alocação de capital disponível com a maior inclinação.



Com a linha de alocação de capital identificada, todos os investidores escolhem um ponto ao longo da linha – alguma combinação do ativo livre de risco e o portfólio de mercado.



Investidores com *aversão ao risco* determinam onde eles permanecerão ao longo da linha de alocação de capital – a linha por si só é a mesma para todos.



Como vimos o desvio padrão de um portfólio é função de:

a. Desvio-padrão de cada ativo (σ_i)
b. Participação (porcentual) de cada ativo na carteira.
c. Coeficiente de correlação dos ativos, ou covariância.

A expressão geral de cálculo do risco de uma carteira que contém *n* ativos, baseando-se no modelo de portfólio desenvolvido por Markowitz, é a seguinte:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{i=1 \\ J\neq I}}^{n} w_i\, w_j\, \rho_{i,j}\, \sigma_i\sigma_j}$$

CARTEIRA COM 2 ATIVOS – MODELO DE MARKOWITZ

Para uma carteira com 2 ativos apenas, temos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{2} w_i\sigma_i(\rho_{i1}\, w_1\sigma_1 + \rho_{i2}w_2\sigma_2)}$$

Expandindo o somatório interno à raiz quadrada, ficamos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_1\sigma_1\, \rho_{12}w_2\sigma_2 + w_2\sigma_2\rho_{21}w_1\sigma_1}$$

Como $\rho_{12} = \rho_{21}$, temos:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_1\, \rho_{12}w_2\sigma_2}$$

Lembrando a definição de coeficiente de correlação:

$$\rho_{12} = \frac{COV(1,2)}{\sigma_1\sigma_2},$$

Podemos abreviar ainda mais esta última expressão:

$$\sigma_{carteira} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2COV(1,2)}$$

Esta expressão nos dá o desvio padrão para uma carteira com 2 ativos apenas:

EXEMPLO

Admita uma carteira formada de duas ações (X e Y), com os seguintes resultados esperados:

	Retorno E(R)	**Desvio-padrão (σ)**
Ação X	15,00%	20,00%
Ação Y	26,00%	30,00%

A participação de cada ação na carteira é w_X = 80% e w_Y = 20% e o coeficiente de correlação é ρ = +1.

Calcule:

a. O retorno esperado da carteira
b. O desvio padrão usando o modelo de Markowitz.

Solução

a. $E(R_{carteira})$= 0,80 x 15% + 0,20 x 26% = 17,20%

b. $\sigma_{carteira} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_i\, w_j\, \rho_{i,j}\, \sigma_i \sigma_j} =$

$\sqrt{(0{,}80^2 x 0{,}20^2) + (0{,}20^2 x 0{,}30^2) + 2x0{,}80x0{,}20x1x0{,}20x0{,}30} = \sqrt{0{,}0484} = 0{,}22$ ou 22,00%

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F
13						
14		Retorno E($R_{ação}$)	Desvio Padrão σ	Participação	Coeficiente de correlação	
15	Ação X	15,00%	20,00%	80,00%	1	
16	Ação Y	26,00%	30,00%	20,00%		
17						
18		Retorno E($R_{Carteira}$)	17,20%			
19		Desvio Padrão σ	22,00%	=RAIZ(D15^2*C15^2+D16^2*C16^2+2*D15*D16*E15*C15*C16)		
20			não tem uma função específica para isso !			
21						
22						
23						
24						

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

Repita o exemplo anterior para uma carteira constituída de 60% de ação X e 40% de ação Y e um coeficiente de correlação ρ = -1.

Aula de Risco.xlsx [Salvo pelo usuário]

	A	B	C	D	E	F
9						
10		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=F7/(RAIZ(D7)*RAIZ(E7))		
11		Coeficiente de Correlação	-0,28474	=CORREL(B2:B6;C2:C6)		
12						
13						
14		Retorno E($R_{ação}$)	Desvio Padrão σ	Participação	Coeficiente de correlação	
15	Ação X	15,00%	20,00%	60,00%	-1	
16	Ação Y	26,00%	30,00%	40,00%		
17						
18		Retorno E($R_{Carteira}$)	19,40%			
19		Desvio Padrão σ	0,000000263%	=RAIZ(D15^2*C15^2+D16^2*C16^2+2*D15*D16*E15*C15*C16)		
20			não tem uma função específica para isso !			
21						
22						
23						

DIVERSIFICAÇÃO VERSUS RISCO

Como vimos no exemplo anterior, a variância para uma carteira de **dois ativos** é dada por:

$$\sigma^2_{portfólio} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\,\rho_{1,2}\,\sigma_1\sigma_2$$

Observe que a *variância da carteira* é função da correlação entre os retornos dos ativos integrantes, medida pelo coeficiente de correlação ($\rho_{i,j}$), que varia entre -1 e +1. No caso de $\rho_{1,2}$ = +1, os ativos sobem ou descem juntos e, quando $\rho_{1,2}$ = -1, um ativo cai quando o outro sobe. O caso de $\rho_{1,2}$ = 0 significa independência entre os ativos.

A maior diminuição de risco da carteira será conseguida quando a correlação entre os ativos for $\rho_{1,2}$ = -1.

A diversificação permite, conforme proposta por Markowitz, a *redução* ou até a eliminação total do **risco diversificável** (não sistemático) de um portfólio. Fica, porém, sempre presente a parcela do risco sistemático ou conjuntural.

É importante que se acrescente, ainda, que a diversificação, quando utilizada com propósito de redução do risco, não é uma decisão aleatória. Deve sempre ser elaborada observando-se as correlações dos retornos dos ativos, de maneira a estabelecer-se a melhor composição possível de uma carteira.

Com base nos valores esperados e riscos calculados para as diversas combinações possíveis da carteira, deve o investidor, considerando a sua curva de indiferença, isto é, seu grau de aversão ao risco, eleger a melhor combinação possível de ativos. O objetivo desta seleção é o de atender satisfatoriamente a sua expectativa com relação ao dilema do risco e retorno, presentes nas decisões de investimento.

RISCO SISTEMÁTICO E SUA MEDIDA - BETA

Até agora, vimos que o risco total associado a um ativo pode ser decomposto em dois elementos*: risco sistemático* e risco *não sistemático*. Assim,

Risco Total = Risco Sistemático + Risco Não Sistemático

Vimos também que o risco não sistemático pode ser quase totalmente eliminado pela diversificação. Como o risco não sistemático pode ser eliminado virtualmente a custo nulo (por meio de diversificação), **não** pode existir recompensa por assumi-lo. Em outras palavras, o mercado não recompensa riscos desnecessários. Portanto, a recompensa por assumir risco depende apenas do risco sistemático de um investimento. A isto se dá o nome de **princípio do risco sistemático**: *o retorno esperado de um ativo com risco depende apenas do risco sistemático daquele ativo.*

Um corolário óbvio deste princípio é que independentemente de que quanto risco total um ativo tenha, apenas a porção de risco sistemático é relevante para determinar o retorno esperado (e o prêmio por risco) desse ativo.

Precisamos, então, aprender a medir o *risco sistemático* de diferentes ativos. A medida específica que utilizaremos é denominada **coeficiente beta**, e será usada a letra grega β para representá-lo.

Definição: O beta nos diz quanto *risco sistemático* um determinado ativo tem em relação ao risco do ativo de mercado. Assim,

$$\beta = \frac{risco\ sistemático\ do\ ativo}{risco\ sistemático\ do\ mercado}$$

Pela definição, um ativo de mercado tem β = 1,0. Um ativo com β = 0,50 tem, portanto, metade do risco sistemático de um ativo de mercado. Um ativo com β = 2,0 tem o dobro.

Vemos, portanto, que o β mede a volatilidade do ativo em relação ao mercado, mostrando que quanto maior o β de um ativo, maior o seu risco frente ao risco de mercado e, consequentemente, o seu prêmio deverá ser maior que o prêmio de mercado.

Obviamente que os investidores *avessos ao risco* preferirão ativos com risco menor que o do mercado, ou seja, que tenham β menor que 1,0. Dessa forma, se a carteira de mercado subir 10%, a carteira do investidor subirá menos do que 10%, porém, se a carteira de mercado cair 10%, a carteira desse investidor cairá menos que 10%.

Os investidores *propensos ao risco*, ao contrário, preferirão ativos com risco maior que o do mercado, ou seja, que tenham β maior que 1,0.

Poderíamos interpretar o β em termos de retornos do ativo e do mercado como:

$$\beta = \frac{COV(R_{ativo}, R_{mercado})}{\sigma^2(R_{mercado})}$$

Aqui percebemos que o β mede a sensibilidade do ativo aos movimentos de mercado.

Claramente, sua estimativa está condicionada da escolha da carteira de mercado. Muitas pessoas usam o S&P 500, mas nós iremos preferir o IBOVESPA.

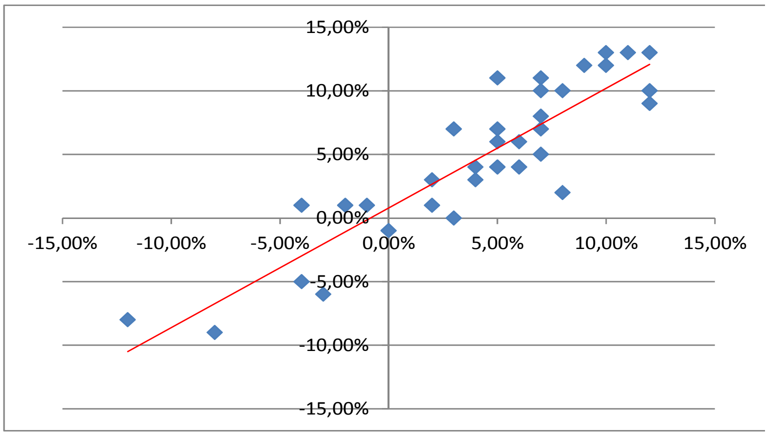
O cálculo do beta de um ativo financeiro negociado na Bolsa de Valores é feito estimando-se uma **REGRESSÃO LINEAR** com os retornos do ativo financeiro (diários, semanais, mensais, etc.) como *variável dependente* R_i e os retornos da carteira de mercado (IBOVESPA) como *variável independente* R_m.

Com o uso das funções embutidas do Excel: COVAR(matriz1;matriz2); VAR.A(matriz1;matriz2), encontramos a covariância dos retornos do ativo e com os do mercado (0,0029), indicando uma ligeira covariância positiva. A variância do mercado (0,83) mostra-se pequena no período. Destarte, o β encontrado foi 0,83, indicando um ativo com risco inferior ao do mercado, apropriado para os investidores avessos ao risco.

Na planilha foram encontradas também outras medidas, o coeficiente de correlação $r_{ativo;mercado}$ (0,894637) e o seu quadrado, chamado coeficiente de determinação que estudaremos mais adiante.

Período	Retorno do Ativo	Retorno do Mercado
(trimestral)	Retorno do Ativo A (Y)	Retorno Mercado (X)
1	3,00%	7,00%
2	5,00%	11,00%
3	7,00%	8,00%
4	5,00%	4,00%
5	5,00%	7,00%
6	7,00%	11,00%
7	6,00%	4,00%
8	11,00%	13,00%
9	8,00%	10,00%
10	12,00%	9,00%
11	7,00%	10,00%
12	2,00%	3,00%
13	-4,00%	-5,00%
14	0,00%	-1,00%
15	2,00%	1,00%
16	8,00%	2,00%
17	4,00%	3,00%
18	4,00%	4,00%
19	-3,00%	-6,00%
20	3,00%	0,00%
21	5,00%	6,00%
22	6,00%	6,00%
23	9,00%	12,00%
24	12,00%	10,00%
25	7,00%	7,00%
26	-12,00%	-8,00%
27	-8,00%	-9,00%
28	-4,00%	1,00%
29	5,00%	4,00%
30	-2,00%	1,00%
31	-1,00%	1,00%
32	6,00%	4,00%
33	7,00%	5,00%
34	10,00%	12,00%
35	12,00%	13,00%
36	10,00%	13,00%

0,002855	=COVAR(B3:B38;C3:C38)	$COV_{ativo;mercado}$
0,00345	=VAR.A(C3:C38)	$var_{mercado}$
0,827557	=D3/D4	BETA
0,894637	=CORREL(B3:B38;C3:C38)	coef. correlação $r_{ativo,mercado}$
0,800375	=D6^2	$r^2_{ativo;mercado}$=coef. Determinação



A tabela abaixo contém os coeficientes β estimados para as ações de algumas empresas multinacionais bastante conhecidas:

Empresa	Coeficiente Beta (β)	Empresa	Coeficiente Beta (β)
Exxon	0,80	Amazon.com	1,95
Wal-Mart	1,15	Anheuser-Busch	0,60
General Motors	1,30	Bank One Corp.	1,25
Microsoft	1,20	Daimler Chrysler AG	1,25
IBM	1,05	Disney	1,05
Harley-Davidson	1,20	eBay	2,20
Dell Computer	1,35	Intel	1,30
America Online	1,65	Merrill Lynch & Co.	1,85
NIKE, Inc.	0,90	Sempra Energy	0,60
PepsiCo, Inc.	0,70	Xerox	1,25
Qualcomm	1,30	Yahoo! Inc.	2,00

Fonte: *Value Line Investment Survey*, New York: Value Line Publishing, 8 mar. 2002

Como ativos com betas maiores têm riscos sistemáticos mais altos, têm retornos esperados maiores. Portanto, com base na tabela acima, um investidor que compre ações da Exxon, com beta de 0,80, deveria ter um rendimento menor, em média, do que um investidor que compre ações da General Motors, que tem um beta de cerca de 1,05.

EXEMPLO

Considere as seguintes informações referentes a dois títulos.

	Desvio-padrão (σ)	Beta (β)
Título X	40%	0,50
Título Y	20%	1,50

a. Qual deles tem o maior risco total?
b. Qual tem o maior risco sistemático?
c. Qual tem o maior risco não sistemático?
d. Qual é o ativo com o maior prêmio de risco?

Solução

a. O título com maior risco total é o X, com σ = 40%.
b. O título com maior risco sistemático é o Y, com β = 1,50.
c. Como o risco total é soma do risco sistemático com o risco não sistemático, o título X deve ter um risco não sistemático maior.
d. De acordo com o princípio do risco sistemático, o título Y deve ter o maior prêmio por risco e o maior retorno esperado, apesar de ter o menor risco total.

BETA DE CARTEIRAS

Vimos antes que o risco de uma carteira não tem relação simples com os riscos dos ativos contidos na carteira. O beta de uma carteira, no entanto, pode ser calculado exatamente como o retorno esperado da carteira. Por exemplo, examinando a Tabela anterior, suponha que você aplique metade de seu dinheiro na Wal-Mart e metade na Harley-Davidson. Qual seria o beta desta combinação? Como a Wal-Mart tem um β = 0,95 e a Harley-Davidson um β = 1,20, o beta da carteira, β_P, seria igual a:

$$\beta_P = 0{,}50 \times \beta_{\text{Wal-Mart}} + 0{,}50 \times \beta_{\text{Harley-Davidson}} = 0{,}50 \times 0{,}95 + 0{,}50 \times 1{,}20 = 1{,}075$$

Em geral, se tivéssemos um grande número de ativos na carteira, multiplicaríamos o beta de cada ativo pelo seu peso na carteira e somaríamos os resultados para obter o *beta da carteira*.

EXEMPLO

Suponha que tenhamos os seguintes investimentos:

Título	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta (β)
Título X	$ 1.000	8%	0,80
Título Y	$ 2.000	12%	0,95
Título Z	$ 3.000	15%	1,10
Título T	$ 4.000	18%	1,40

a. Qual é o retorno esperado da carteira?
b. Qual é o beta dessa carteira?
c. Essa carteira tem mais ou menos risco sistemático do que um ativo médio?

Solução

Precisamos em primeiro lugar calcular os pesos da carteira. Assim

Título X: $ 1.000/$ 10.000 = 10%

Título Y: $ 2.000/$ 10.000 = 20%

Título Z: $ 3.000/$ 10.000 = 30%

Título T: $ 4.000/$ 10.000 = 40%

a. O retorno esperado $E(R_{portfólio})$ será:

$E(R_p) = 0,10 \times E(R_X) + 0,20 \times E(R_Y) + 0,30 \times E(R_Z) + 0,40 \times E(R_T) =$

$= 0,10 \times 8\% + 0,20 \times 12\% + 0,30 \times 15\% + 0,40 \times 18\% = 14,9\%$

b. De maneira análoga, o beta da carteira $\beta_{portfólio}$ será:

$\beta_P = 0,10 \times \beta_X + 0,20 \times \beta_Y + 0,30 \times \beta_Z + 0,40 \times \beta_T =$

$= 0,10 \times 0,80 + 0,20 \times 0,95 + 0,30 \times 1,10 + 0,40 \times 1,40 =$

$= 1,16$

c. Esta carteira tem um retorno esperado de 14,9% e um beta de 1,16. Como o beta é maior do que 1,0 , esta carteira tem risco sistemático superior ao do ativo médio.

Aula de Risco.xlsx

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Título	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta β	Peso na Carteira			
2	Título X	R$ 1000,00	8%	0,8	10%	=B2/SOMA($B$2:$B$5)		
3	Título Y	R$ 2000,00	12%	0,95	20%			
4	Título Z	R$ 3000,00	15%	1,1	30%			
5	Título T	R$ 4000,00	18%	1,4	40%			
6								
7		Retorno Esperado $E(R_{carteira})$	14,90%	=SOMARPRODUTO(E2:E5;C2:C5)				
8		$\beta_{portfolio}$	1,16	=SOMARPRODUTO(E2:E5;D2:D5)				
9								
10								
11								

EXERCÍCIOS de FIXAÇÃO

1. Qual é o princípio do risco sistemático?
2. O que mede o coeficiente beta?
3. Como se calcula o beta de uma carteira?
4. Verdadeiro ou falso: o retorno esperado de um ativo com risco depende do risco total do ativo. Explique.

EXERCÍCIOS

1. Você tem uma carteira com 30% investidos na ação Q, 20% investidos na ação R, 25% na ação S e 25% na ação T. Os betas dessas quatro ações são 1,40, 0,95, 1,20 e 0,80, respectivamente. Qual é o beta da carteira?

	A	B	C	D	E	F	G
14							
15	Ação	Quantia Investida	Retorno Esperado	Beta β	Peso na Carteira		
16	Ação Q			1,4	30%		
17	Ação R			0,95	20%		
18	Ação S			1,2	25%		
19	Ação T			0,8	25%		
20							
21		Retorno Esperado $E(R_{carteira})$					
22–23		$\beta_{portfolio}$	1,11	=SOMARPRODUTO(E2:E5;D2:D5)			
24							
25							

2. Você possui uma carteira com pesos iguais no ativo livre de risco e em duas ações. Se uma das ações possui beta de 1,40 e o total da carteira tem o mesmo risco que o mercado, qual deve ser o beta da outra ação de sua carteira?

LINHA DE MERCADO DE TÍTULOS - LMT

Agora estamos prontos para verificar como o **risco** é remunerado no mercado. Para iniciar, suponha que o ativo X tenha um retorno esperado de $E(R_X) = 20\%$ e $\beta_X = 1,6$. Além disso, a taxa de retorno do ativo livre de risco é $R_f = 8\%$. Observe que o retorno do ativo livre de risco, por definição, não tem *risco sistemático* (ou risco não sistemático) e, portanto, o ativo livre de risco tem beta igual a 0.

Vamos então considerar uma carteira composta pelo **ativo X** e pelo **ativo livre de risco**. Podemos calcular alguns retornos esperados diferentes possíveis para a carteira variando o porcentual investido nestes dois ativos. Por exemplo, se 25% da carteira estiverem investidos no ativo X, o retorno esperado será:

$$E(R_p) = 0,25 \text{ x } E(R_X) + (1 - 0,25) \text{ x } E(R_f) = 0,25 \text{ x } 20\% + 0,75 \text{ x } 8\% = 11,0\%$$

De maneira análoga, o beta da carteira, β_P, seria igual a:

$$\beta_P = 0,25 \text{ x } \beta_X + 0,75 \text{ x } \beta_f = 0,25 \text{ x } 1,6 + 0,75 \text{ x } 0 = 0,40$$

Uma pergunta que você deve estar se fazendo é se é possível que porcentual investido no ativo X seja maior do que 100%. A resposta é: *sim*. A maneira pela qual isso pode acontecer envolve fazer com que o investidor tome emprestado à taxa do ativo livre de risco. Por exemplo, suponha que o investidor possua \$ 100 e tome mais \$ 50 emprestados a 8%, a taxa do ativo livre de risco. O total do investimento no ativo X seria \$ 150, ou 150% da riqueza do investidor. O retorno esperado, nesse caso, seria:

$$E(R_p) = 1{,}50 \times E(R_X) + (1 - 1{,}50) \times E(R_f) = 1{,}50 \times 20\% - 0{,}50 \times 8\% = 26{,}0\%$$

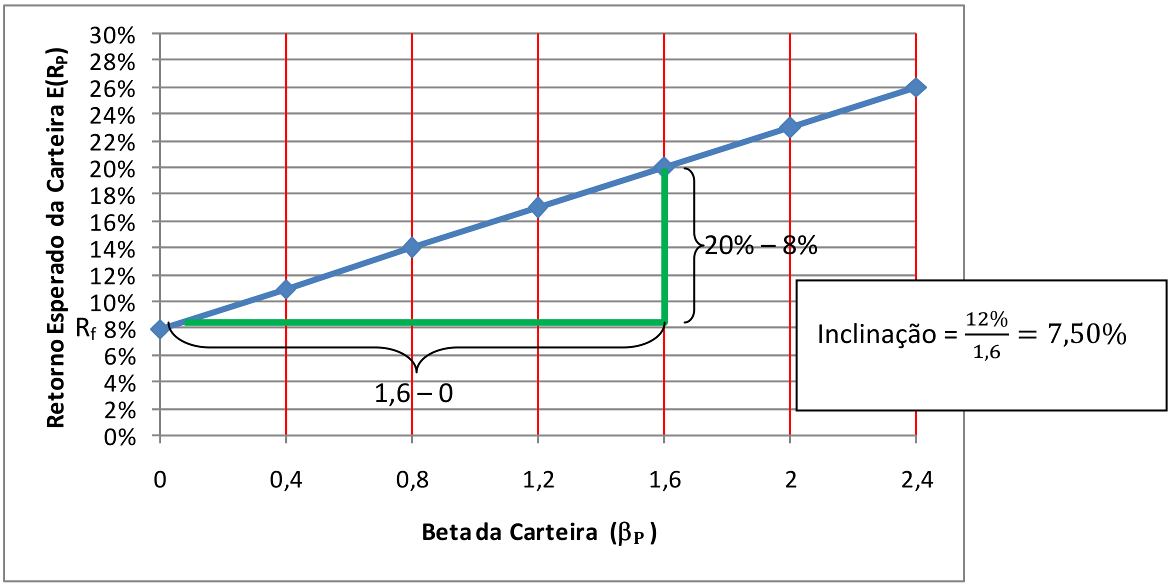
O beta desta carteira seria igual a:

$$\beta_P = 1{,}50 \times \beta_X + (1 - 1{,}50) \times \beta_f = 1{,}50 \times 1{,}6 - 0{,}50 \times 0 = 2{,}40.$$

Poderíamos calcular outras possibilidades. Sejam as carteiras:

Porcentagem do ativo X na carteira	Retorno Esperado da Carteira	Beta da Carteira
0%	8%	0,0
25%	11%	0,4
50%	14%	0,8
75%	17%	1,2
100%	20%	1,6
125%	23%	2,0
150%	26%	2,4

Vamos construir um gráfico dos **retornos esperados** desta carteira em função do **beta** da carteira:



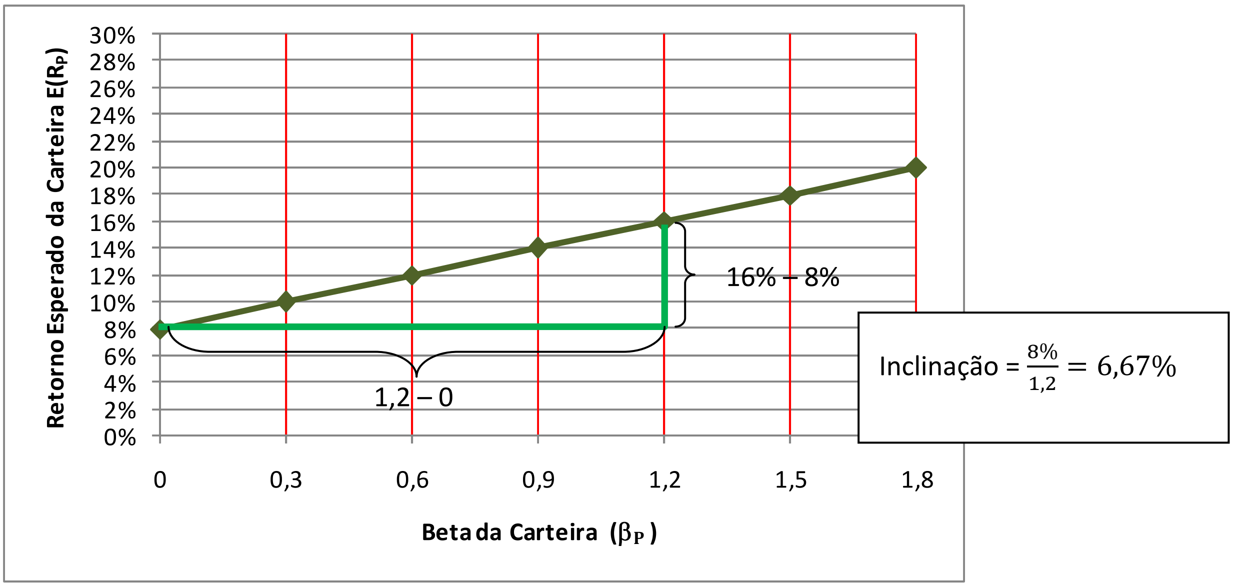
Como mostrado no gráfico, à medida que reduzimos nossa aplicação no ativo livre de risco e aumentamos a aplicação no ativo X, o beta eleva-se de 0 para 1,6. Ao mesmo tempo, o retorno esperado eleva-se de 8% para 20%. A inclinação desta linha é 7,50%. Esta inclinação corresponde exatamente ao prêmio por risco do ativo X ($E(R_X) - R_f$), dividido pelo β_X. Isso nos diz que o ativo X oferece um *quociente recompensa/risco*[13] de 7,50%. Em outras palavras, o ativo X tem um prêmio de 7,50% por unidade de risco sistemático.

Suponha agora que consideremos um *segundo ativo*, o **ativo Y**. Esse ativo tem um beta de 1,2 e um retorno esperado de 16%. Qual é o melhor investimento, o ativo X ou o ativo Y? Como você pode suspeitar, mais uma vez não podemos responder com segurança. Alguns investidores preferirão X, enquanto outros preferirão Y. No entanto, podemos dizer que X é melhor porque, conforme demonstraremos, Y oferece uma compensação inadequada pelo nível de risco sistemático, ao menos em relação a X.

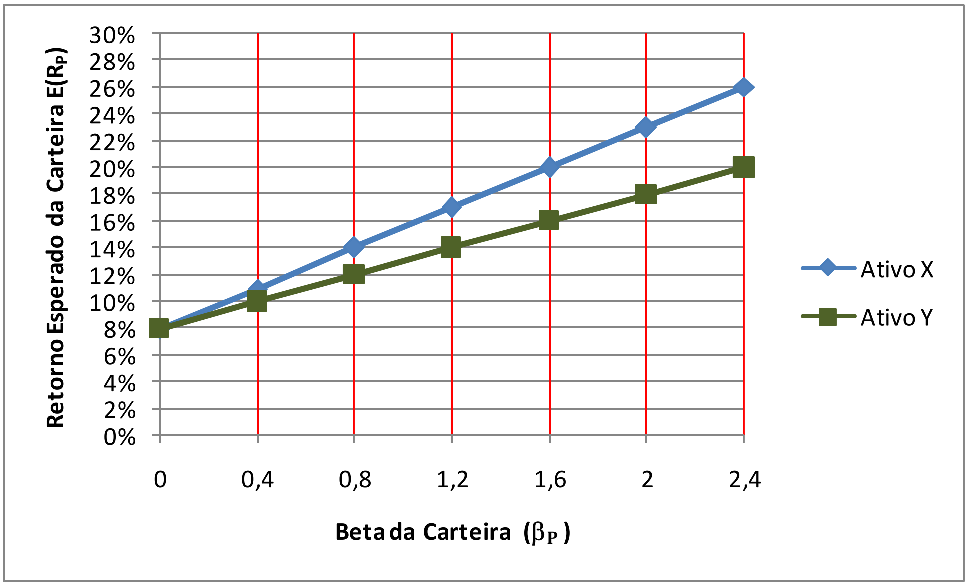
[13] Algumas vezes este quociente é denominado *índice de Treynor*, em homenagem a um de seus criadores.

Primeiramente faremos com o ativo Y o mesmo que fizemos com o ativo X, isto é, calculemos as diferentes combinações entre ele (Y) e o ativo livre de risco. Para isso, seja:

Porcentagem do ativo Y na carteira	Retorno Esperado da Carteira	Beta da Carteira
0%	8%	0,0
25%	11%	0,3
50%	12%	0,6
75%	14%	0,9
100%	16%	1,2
125%	18%	1,5
150%	20%	1,8



Comparando os resultados:



A linha que descreve as combinações de retornos esperados e betas para o ativo X é mais alta do que a linha que descreve as combinações envolvendo o ativo Y. Isso nos diz que, para qualquer nível de risco sistemático (medido pelo β), as combinações entre o ativo X e o ativo livre de risco sempre oferecem retorno maior. É por isso que somos capazes de afirmar que o ativo X é um investimento melhor do que o ativo Y.

O ativo Y tem um *quociente entre recompensa e risco* de 6,67%, menor do que o *quociente* de 7,50% oferecido pelo ativo X.

A situação que descrevemos para os ativos X e Y não poderia persistir em um mercado bem organizado, porque os investidores se sentiriam atraídos pelo ativo X e se afastariam do ativo Y. Em consequência, o preço do ativo X aumentaria e o do ativo Y diminuiria. Como os *preços* e os *retornos* se movem em **direções opostas**, o resultado seria o de que o retorno esperado de X cairia, e o de Y iria subir.

Esses movimentos, de compra e venda, continuariam até que os dois ativos se situassem exatamente na mesma linha o que significa que estariam oferecendo o mesmo retorno por unidade de risco assumido. Em outras palavras, em um **mercado ativo e competitivo**, devemos ter:

$$\frac{E(R_X) - R_f}{\beta_X} = \frac{E(R_Y) - R_f}{\beta_Y}$$

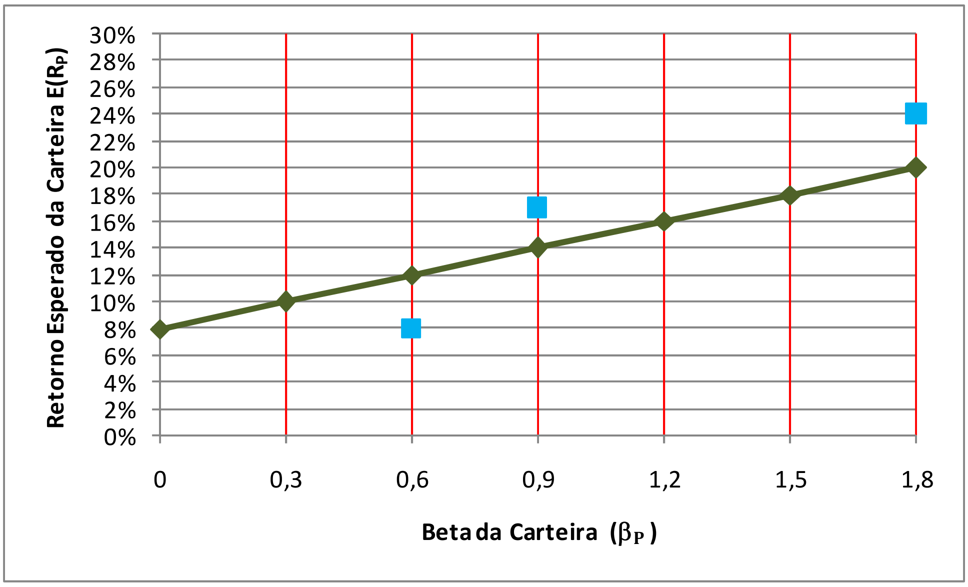
Essa é a **relação fundamental** entre *risco* e *retorno*.

Estendendo o nosso argumento para *n* ativos, chegamos à conclusão:

"*O quociente entre recompensa e risco precisa ser o mesmo para todos os ativos existentes no mercado*".

Este resultado não é muito surpreendente. O que ele diz, por exemplo, é que se um ativo tem o dobro do *risco sistemático* de outro, seu prêmio por risco precisa ser simplesmente duas vezes maior.

Como todo os ativos precisam ter o mesmo quociente entre recompensa e retorno, eles devem estar situados na mesma linha. Este argumento é ilustrado na Figura abaixo:



Os ativos que estão acima da linha, seus preços aumentarão, e seus retornos esperados irão cair até o indicado exatamente pela linha. De maneira análoga, se o ativo estiver graficamente abaixo da linha, seu retorno esperado aumentará até atingir também o representado exatamente pela linha.

O argumento que apresentamos se aplica a *mercados ativos, competitivos e com bom funcionamento*. Os mercados financeiros, como, por exemplo, a NYSE, atende melhor este critério. Outros mercados, como, por exemplo, o mercado de ativos reais, pode ou não atender a este critério. Por esta razão, estes conceitos são mais úteis para examinar mercados financeiros. Portanto, nos concentraremos em tais mercados. No entanto, conforme discutiremos posteriormente, as informações sobre risco e retorno extraídas de mercados financeiros são essenciais para avaliar os investimentos que as empresas fazem em ativos reais.

EXEMPLO

Diz-se que um ativo está *super-avaliado* quando o seu preço é muito alto em face de seu retorno esperado e risco. Suponha que você observe a seguinte situação:

Título	Retorno Esperado	Beta
Título A	14%	1,3
Título B	10%	0,8

A taxa de retorno corrente do ativo livre de risco é de 6%. Algum dos dois títulos citados está super-avaliado em relação ao outro?

Solução

Para responder, calculamos o quociente entre recompensa e risco dos dois ativos. Esse quociente é:

$$\frac{(14\%-6\%)}{1{,}3} = 6{,}15\% \text{ ....para o ativo A}$$

$$\frac{(10\%-6\%)}{0{,}8} = 5\% \text{ ....para o ativo B}$$

Concluímos que o título B oferece um retorno esperado insuficiente para seu nível de risco, pelo menos em relação ao título B. Como o seu retorno esperado está muito baixo, seu preço está muito alto. Em outras palavras o título B está super-avaliado em relação ao título A, e esperaríamos que caísse em relação ao do título A. O título A está subavaliado em relação ao B.

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

Suponhamos que você observe a seguinte situação:

Título	Retorno Esperado	Beta
Título Alfa	19%	1,6
Título Gama	16%	1,2

Sendo a taxa livre de risco de 8%, esses títulos estão precificados corretamente? Qual seria a taxa livre de risco para que eles estivessem corretamente precificados? Resposta: o quociente entre recompensa e risco de alfa é 6,875% e Gama é 6,67%. Por serem diferentes, eles NÃO estão precificados corretamente. A taxa livre de risco precisaria ser 7%.

EXERCÍCIOS

A ação M tem beta igual a 1,4 e retorno esperado de 25%. A ação N tem beta de 0,85 e retorno esperado de 15%. Sendo a taxa de retorno do ativo livre de risco igual a 6% e o prêmio por risco de mercado igual a 10,3%, essas ações estão corretamente precificadas? Qual está subavaliada? Qual está super-avaliada?

A linha que resulta da representação gráfica da relação entre retornos esperados e betas é importantíssima e tem um nome: Linha de mercado de Títulos (LMT)[14]. Após o VPL, a LMT talvez seja o conceito mais importante nas finanças modernas.

Será útil conhecermos a equação da LMT. Existem diversas maneiras diferentes de a escrevermos, mas uma é particularmente comum. Suponha que você considere uma carteira constituída por todos os ativos existentes no mercado. Tal carteira é denominada carteira de mercado, e expressaremos o retorno dessa carteira de mercado por $E(R_M)$.

[14] Ou SML em inglês

Como todos os ativos existentes precisam estar situados na LMT, o mesmo ocorre para a **carteira de mercado** composta por todos esses ativos. Para determinar suas coordenadas na LMT, precisamos conhecer o *beta da carteira de mercado*, β_M.

Como esta carteira é representativa de todos os ativos no mercado, ela precisa ter o risco sistemático médio. Em outras palavras, precisa ter um beta igual a 1,0.

$$Inclinação\ da\ LMT = \frac{E(R_M) - R_f}{\beta_M} = \frac{E(R_M) - R_f}{1} = E(R_M) - R_f$$

A expressão $E(R_M) - R_f$ é, geralmente, denominada **prêmio por risco de mercado**, porque é o prêmio pelo risco da carteira de mercado.

Para um ativo qualquer, com $E(R_i)$ e β_i, que também precisa estar situado na LMT, o seu quociente entre recompensa e risco é igual àquele do mercado, assim,

$$\frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} = \frac{E(R_M) - R_f}{1}$$

Logo, podemos escrever:

$$\boxed{E(R_i) = R_f + \beta_i[E(R_M) - R_f]}$$

Este resultado é o famoso **modelo de precificação de ativo (CAPM)**[15], derivado por *Sharpe-Litner-Mossin* (Sharp ganhou o prêmio Nobel de economia em 1990 por ser o seu principal teórico).

O que o CAPM mostra é que o retorno esperado de determinado ativo depende de três coisas:

1. *Valor do dinheiro no tempo*. Medido pela taxa livre de risco, R_f, mostra a recompensa exigida por simplesmente esperar pela devolução do dinheiro, sem assumir risco nenhum.
2. *Recompensa por assumir risco sistemático*. Medida pelo prêmio por risco de mercado, $E(R_M) - R_f$, esse componente corresponde à recompensa que o mercado oferece para se assumir um nível médio de risco sistemático, além de esperar.
3. *Nível de risco sistemático*. Medido pelo β_i, esse é o nível de risco sistemático presente em determinado ativo, em relação a um ativo médio.

Acrescente-se que, o CAPM é válido tanto para carteiras de ativos quanto para ativos individuais. Anteriormente, vimos como calcular o β de uma carteira. Para encontrar o retorno esperado de uma carteira, simplesmente precisamos utilizar esse β na equação do CAPM.

EXEMPLO

Suponha que a taxa livre de risco seja 4%, o prêmio por risco de mercado seja igual a 8,6% e o beta de determinada ação seja 1,3. Com base no CAPM,

a. qual é o retorno esperado dessa ação?;
b. qual seria o retorno esperado se o beta da ação fosse duas vezes maior?

Solução

a. Com o beta de 1,3, o prêmio por risco da ação é 1,3 x 8,6%, ou seja 11,18%. A taxa de retorno R_f = 4%, portanto, o retorno esperado R_i = 15,18%.

[15] CAPM – *Capital Assets Pricing Model*. Após a sua derivação a análise de projetos de investimentos ganhou novo alento e um enfoque quantitativo mais fundamentado, proporcionando uma estimativa de custo de capital em um contexto de mercado.

b. Se o beta fosse o dobro, β = 2,6, o prêmio por risco seria o dobro, 22,36% e, portanto, o retorno esperado seria de 26,36%.

EXERCÍCIO de FIXAÇÃO

1. Qual é a relação fundamental entre risco e retorno em mercados bem organizados.
2. O que é Linha de Mercado de Títulos – LMT? Por que todos os ativos precisam estar situados exatamente nessa linha, em mercados bem organizados?
3. O que é o modelo de precificação de ativos, CAPM? O que ele diz a respeito do retorno exigido de um investimento com risco?
4. Suponha que a taxa livre de risco seja 8%. O retorno esperado do mercado é 14%. Se determinada ação tem beta igual a 0,60, qual é seu retorno esperado com base no CAPM? Se outra ação tem retorno esperado de 20%, qual deve ser seu beta? Resposta: O prêmio de risco do mercado será 6%. A primeira ação tem β = 0,60 e, portanto, seu retorno esperado é 11,6%. A segunda ação tem prêmio de risco 12% e seu beta é 2,0

EXERCÍCIOS

1. Uma ação tem beta de 1,2, o retorno esperado do mercado é de 17% e a taxa livre de risco é de 8%. Qual deve ser o retorno esperado da ação?
2. Uma ação tem retorno esperado de 14%, a taxa livre de risco é de 4% e o prêmio pelo risco de mercado é de 6%. Qual deve ser o retorno esperado da ação?
3. Uma ação tem retorno esperado de 15%, seu beta é igual a 0,9 e a taxa do ativo livre de risco é de 6%. Qual deve ser o retorno esperado do mercado?
4. Uma ação tem retorno esperado de 22% e beta de 1,6. O retorno esperado do mercado é de 16%. Qual deve ser a taxa de retorno do ativo livre de risco?

A linha de mercado de títulos nos diz qual é a recompensa por assumir riscos em mercados financeiros. No mínimo, qualquer novo investimento adotado por nossa empresa precisa oferecer um retorno esperado pelo menos igual ao que o mercado financeiro oferece pelo mesmo nível de risco. A razão para isto é que nossos acionistas simplesmente têm a possibilidade de investir eles mesmos no mercado financeiro.

A única maneira de beneficiar nossos acionistas é encontrando investimentos com retornos esperados superiores aos ofertados nos mercados financeiros para o mesmo nível de risco. Tais investimentos terão VPL positivos. Portanto, se perguntarmos: qual é a taxa de desconto apropriada? A resposta é a de que deveríamos utilizar o retorno esperado oferecido nos mercados financeiros para investimentos com o mesmo risco sistemático.

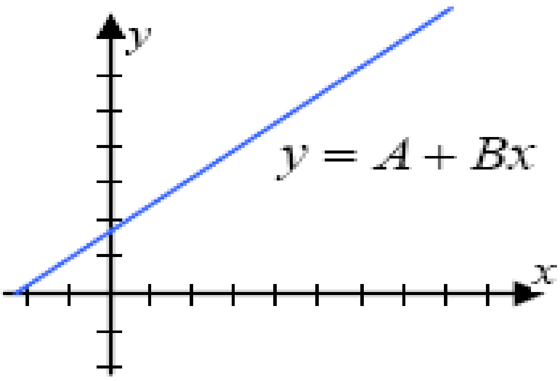
Em outras palavras, para determinar se um investimento tem VPL positivo, essencialmente estamos comparando seu retorno esperado daquele novo investimento ao que o mercado financeiro estaria oferecendo por um investimento com beta igual. Isso explica porque a LMT é tão importante; ela nos mostra qual é a "taxa vigente" para assumir risco na economia.

A taxa apropriada de desconto de novos projetos é a taxa mínima de retorno esperada que um investimento precisa oferecer para ser atraente. Este retorno mínimo esperado é denominado custo de capital do investimento.

APÊNDICE

REGRESSÃO LINEAR

A regressão linear é um método estatístico para se encontrar uma linha reta suave que melhor se ajusta a dois ou mais pares de dados de uma amostra que está sendo analisada. Qualquer linha reta como aquela uma mostrada na Figura 1 tem dois coeficientes específicos que a localizam precisamente num sistema de coordenadas planas: um <u>intercepto</u> em *y* que denominamos de ***A*** e uma <u>inclinação</u> ***B***. Estes coeficientes compõem a equação da linha reta ***y*** = ***A*** + ***Bx***. É importante mencionar também que a correlação | ***r*** | é sempre 1 quando somente dois pontos forem entrados.

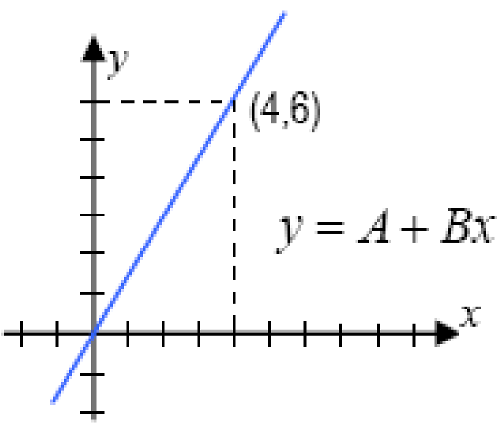


COMO FAZER REGRESSÃO LINEAR NA HP-12C

Na HP12C, somatórios resultantes de dados estatísticos são apropriados para cálculos de regressão linear. Dadas as coordenadas *y* e *x* de quaisquer dois ou mais pontos pertencentes a uma curva, os coeficientes de regressão linear podem ser facilmente encontrados.

EXEMPLO 1

Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura abaixo encontre o *intercepto y* e a *inclinação* para caracterizar a linha reta. Note que a linha cruza o eixo *x* na origem (0,0).



Um dos pontos que pertence à curva é (0,0) e o outro é (4,6). Ambos devem ser entrados para se calcular a equação da linha. Certifique-se de limpar as memórias estatísticas/somatório antes de início do problema.

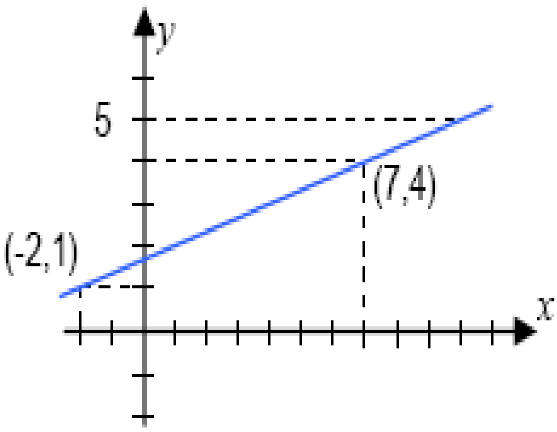
f Σ 0 ENTER 0 Σ+ 6 ENTER 4 Σ+

Agora calcule a inclinação (B) entrando com: (Desde que *A* é zero)

1 g ŷ,r 1,50

EXEMPLO 2

Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura 5, compute o intercepto *y* e a inclinação para caracterizar a linha reta. Daí, então, use o x-previsto para computar a coordenada x relacionada à *y*=5.



Os pares de dados devem ser entrados antes de se computar os coeficientes.

1 ENTER 2 CHS Σ+

4 ENTER 7 Σ+

Como a linha não cruza o eixo x na origem, estimamos y quando x = 0 para achar o **A**, intercepto-y:

0 g $\hat{y}$,r A = 1,67

Para calcular a inclinação, pressione agora:

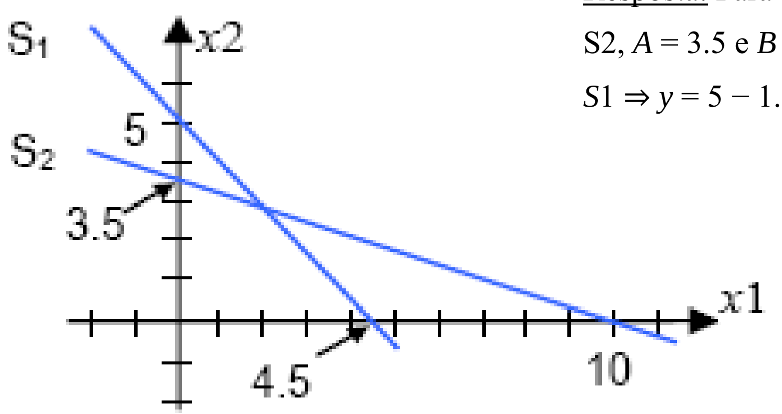
1 g $\hat{y}$,r x<>y R↓ x<>y - B = 0,33

Agora é necessário estimar x para *y*=5.

5 **g $\hat{x}$,r x = 10**

EXEMPLO 3

A programação linear é uma técnica comum usada para resolver problemas de pesquisa operacional por inspeção gráfica. Baseado na informação apresentada no gráfico da Figura 10, compute o intercepto-*y* e a inclinação para ambas as linhas S1 e S2.



Resposta: Para S1, $A = 5$ e $B = -1.11$.

S2, $A = 3.5$ e $B = -0.35$.

$S1 \Rightarrow y = 5 - 1.11x \quad S2 \Rightarrow y = 3.5 - 0.35x$

EXERCÍCIOS

1. Em Economia, a demanda por x unidades de um produto ao preço unitário de p unidades monetárias (u.m.) é dada por uma equação envolvendo essas variáveis, chamada **equação de demanda**. Também a oferta de x unidades de um produto ao preço unitário de p (u.m.) é dada por uma equação, chamada **equação de oferta**.

Considere as tabelas abaixo:

unidades	Preço
0	6,00
1	5,50
2	5,00
3	4,50
4	4,00
5	3,50
6	3,00
7	2,50
8	2,00
9	1,50

unidades	Preço
0	1,00
1	3,00
2	5,00
3	7,00
4	9,00
5	11,00
6	13,00
7	15,00
8	17,00
9	19,00

a. Encontre as equações de demanda e de oferta.
b. Construa os gráficos de demanda e de oferta.
c. O ponto de equilíbrio é atingido quando forem vendidas quantas unidades? A que preço?

2. Na produção de peças, uma industria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida . Sendo x o número de unidades produzidas:

a) escreva a lei da função que fornece o custo total de peças;

b) calcule o custo de 100 unidades;

3. (FGV-SP) Os gastos de consumo (C) de uma família e sua renda (x) são tais que $C = 200+0,8x$. Podemos então afirmar que :

(A) se a renda aumenta em 500, o consumo aumenta em 500,

(B) se a renda diminui em 500, o consumo diminui em 500.

(C) se a renda aumenta em 1000, o consumo aumenta em 800.

(D) se a renda diminui em 1000, o consumo diminui em 2800.

4. (VUNESP) Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil, via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cobra R$ 1,37 pela primeira pagina e R$ 0,67 por pagina que segue, completa ou não.Qual o número mínimo de mensagens para que o preço ultrapasse o valor de R$ 10,00 é de:

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

PRATICANDO

Construir a equação de regressão, com ela fazer um gráfico e determinar a altura do filho de um pai com 164 cm, para a distribuição de altura dos pais (X) e a altura dos filhos (y):

x	y
164	166
166	166
169	171
169	166
171	171
173	171
173	178
176	173
178	178

f Σ
166 ENTER 164 Σ+
166 ENTER 166 Σ+
171 ENTER 169 Σ+
166 ENTER 169 Σ+
171 ENTER 171 Σ+
171 ENTER 173 Σ+
178 ENTER 173 Σ+
173 ENTER 176 Σ+
178 ENTER 178 Σ+

Com as memórias estatísticas carregadas, vamos encontrar a equação da reta de regressão:
0 g y,r ....22.007 intercepção
ENTER 1 g y,r x<>y R↓ x<>y - ....0.8720 Inclinação

A equação da reta de regressão: $\hat{Y}$ = 0,8720 x + 22.007

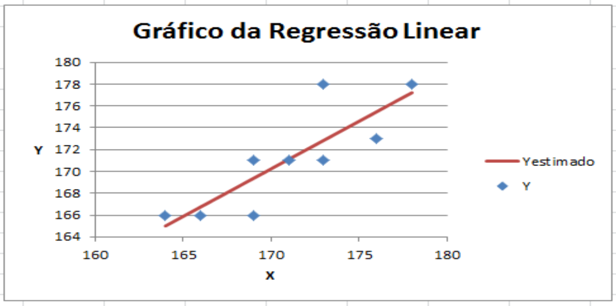
	A	B	C	D	E	F	G
14							
15	X	Y					
16	164	166					
17	166	166	Intercepto	22,007	=INTERCEPÇÃO(B16:B24;A16:A24)		
18	169	171					
19	169	166	Inclinação	0,872	=INCLINAÇÃO(B16:B24;A16:A24)		
20	171	171					
21	173	171	Equação	y=	0,872	x +	22,007
22	173	178					
23	176	173					
24	178	178					
25							
26							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	RESUMO DOS RESULTADOS								
2									
3	*Estatística de regressão*								
4	R múltiplo	0,839583387							
5	R-Quadrado	0,704900264							
6	R-quadrado ajustado	0,662743158							
7	Erro padrão	2,730773425							
8	Observações	9							
9									
10	ANOVA								
11		*gl*	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*			
12	Regressão	1	124,6890244	124,6890244	16,7207938	0,004636173			
13	Resíduo	7	52,1998645	7,4571235					
14	Total	8	176,8888889						
15									
16		*Coeficientes*	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*	*Inferior 95,0%*	*Superior 95,0%*
17	Interseção	22,00745257	36,47498588	0,603357398	0,56530055	-64,24218362	108,2570888	-64,24218362	108,2570888
18	Variável X 1	0,87195122	0,213237579	4,089106724	0,004636173	0,367724468	1,376177971	0,367724468	1,376177971
19									
20									

X	Y
164	166
166	166
169	171
169	166
171	171
173	171
173	178
176	173
178	178

Intercepto	22,007	=INTERCEPÇÃO(B16:B24;A16:A24)
Inclinação	0,872	=INCLINAÇÃO(B16:B24;A16:A24)
Equação	y=	0,872 x + 22,007

Tabela Auxiliar	
x	$\hat{y}$
164	165,0074526
166	166,751355
169	169,3672087
169	169,3672087
171	171,1111111
173	172,8550136
173	172,8550136
176	175,4708672
178	177,2147696



Chama-se *coeficiente de determinação* R^2 (R-quadrado) a razão:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y} - \overline{y})^2}{\sum(y - \overline{y})^2}$$

$$R^2 = \frac{124,7037}{176,8889} = 0,7049 \text{ ou } 70,49\%$$

O coeficiente de determinação é uma medida descritiva da proporção da variação de Y que pode ser explicada por x. Segundo o modelo, temos $R^2 \cong 70\%$ dentre os 9 indivíduos estudados, i.é, 70% da variação das alturas é determinada pelos pais e 30% por outros fatores.

x	y	$(y-y_{méd})^2$	$(\hat{y} - y_{méd})^2$
164	166	26,1235	37,1626
166	166	26,1235	18,9409
169	171	0,0123	3,0141
169	166	26,1235	3,0141
171	171	0,0123	0,0001
173	171	0,0123	3,0691
173	178	47,4568	3,0691
176	173	3,5679	19,0785
178	178	47,4568	37,3552

Na HP-12C podemos encontrar facilmente o Coeficiente de Determinação R^2 :

Com as memórias estatísticas ainda carregadas, digite:

1 g $\hat{y}$,r x<>y ENTER 2 Y^x .... 0.7049 ou 70.49%

Repetindo: praticamente 70% das alturas dos filhos são EXPLICADAS pelas alturas dos pais. O restante, 30%, das alturas são explicadas por outros fatores.