PROBABILIDADES

Probabilidade Condicional

BERTOLO

Exemplo Introdutório

Vamos introduzir a noção de probabilidade condicional através de um exemplo.

Consideremos 250 estudantes que cursam o 4º ano de Ciências Contábeis. Destes estudantes, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam Auditoria (A) e 140 cursam Estatística (E).

A distribuição dos estudantes é a seguinte:

Disciplina / Sexo	A	E	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um estudante é sorteado ao acaso.

a. Qual a probabilidade dele ser homem? 100/250 = 40%
b. Qual a probabilidade dele ser mulher? 150/250 = 60%
c. Qual a probabilidade dele estar cursando Estatística? 140/250 = 56%
d. Qual a probabilidade dele estar cursando Auditoria? 110/250 = 44%
e. Qual a probabilidade dele ser Homem E estar cursando Estatística? $P(H \cap E) = 60/250 = 24\%$
f. Qual a probabilidade dele ser mulher E estar cursando Estatística? $P(M \cap E) = 80/250 = 32\%$
g. Qual a probabilidade dele ser Homem E estar cursando Auditoria? $P(H \cap A) = 40/250 = 16\%$
h. Qual a probabilidade dele ser mulher E estar cursando Auditoria? $P(M \cap A) = 70/250 = 28\%$

Exemplo Introdutório - Continuação

Vamos introduzir a noção de probabilidade condicional através de um exemplo.

Consideremos 250 estudantes que cursam o 4º ano de Ciências Contábeis. Destes estudantes, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam Auditoria (A) e 140 cursam Estatística (E).

A distribuição dos estudantes é a seguinte:

Disciplina / Sexo	A	E	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um estudante é sorteado ao acaso.

Qual a probabilidade de que esteja cursando Estatística, dado que é mulher?

A pergunta mudou. No universo das mulheres da classe queremos a probabilidade de ao ser escolhida ao acaso estar cursando Estatística.

Solução do Exemplo

O espaço amostral agora não é mais o total de alunos 250, e sim o total de mulheres 150. O Ω ficou reduzido!!!

Disciplina / Sexo	A	E	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

$$P(\text{cursa Estatística, dado que é mulher}) = \frac{\text{Nº de mulheres cursando Estatística}}{\text{Nº total de mulheres}} = \frac{80}{150}$$

Representamos esta probabilidade assim: **P(E|M)**

Vamos agora dividir o numerador e o denominador pelo total de alunos 250.

$$P(E|M) = \frac{80}{150} = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{P(M \cap E)}{P(M)}$$

Probabilidade Condicional

Considerando dois eventos **A** e **B** associados a um espaço amostral Ω. A probabilidade de **A** ocorrer dado que o evento **B** ocorreu é representada pela expressão:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, em\ que\ P(B) > 0}$$

Atenção!
Quando calculamos a probabilidade P(A|B), a idéia intuitiva que podemos ter é que o evento **B** seja um novo espaço amostral reduzido dentro do qual queremos calcular a probabilidade do evento **A**.

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, em\ que\ P(A) > 0}$$

Exemplo – Livro do Medeiros p. 157

Uma empresa avalia em 60% a sua probabilidade de ganhar uma concorrência para o recolhimento do lixo em um bairro A da capital. Se ganhar a concorrência no bairro A, acredita que tem 90% de probabilidade de ganhar outra concorrência para o recolhimento do lixo em um bairro B próximo a A.
Determine a probabilidade de a empresa ganhar ambas as concorrências.

Solução

O que o exercício pede é P(B ∩ A). Assim, queremos a probabilidade de ganhar B E A. Foi dado P(B|A) = 90% e P(A) = 60%

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow 90\% = \frac{P(A \cap B)}{60\%}$$

$$P(A \cap B) = 90\% \,.\, 60\% = \mathbf{54\%}$$

Exercício

As pesquisas de opinião apontam que 20% da população é constituída por mulheres que votam no partido X. Sabendo-se que 56% da população são mulheres, qual é a probabilidade de que uma mulher selecionada ao acaso na população vote no partido X?

Solução
O que o exercício dá P(M∩X) = 20% e P(M) = 56% e pede P(X|M).

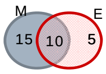
$$P(X|M) = \frac{P(X \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(X|M) = \frac{20\%}{56\%} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}}$$

Mais exercícios do Medeiros p. 157

1. Um projeto para ser transformado em lei deve ser aprovado pela Câmara dos Deputados e pelo Senado. A probabilidade de ser aprovado pela Câmara dos Deputados é 40%. Caso seja aprovado na Câmara dos Deputados, a probabilidade de ser aprovado no Senado é 80%. Calcule a probabilidade deste projeto ser transformado em lei. *Resp: 0,32*

2. No primeiro ano de uma faculdade, 25% dos estudantes são reprovados em Matemática, 15% são reprovados em Estatística e 10% são reprovados em ambas.
Um estudante é selecionado ao acaso, nesta faculdade. Calcule a probabilidade de que:
a. *Ele seja reprovado em Matemática, sabendo-se que foi reprovado em Estatística. Resp: 2/3*
b. *Ele não seja reprovado em Estatística, sabendo-se que foi reprovado em Matemática. Resp: 0,6*

a. $P(M|E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{10\%}{15\%} = \frac{2}{3}$

b. 

$P(\bar{E}|M) = \frac{15}{25}$

Mais exercícios do Medeiros p. 157

3. Uma rifa composta por 15 números irá definir o ganhador de dois prêmios sorteados um de cada vez. Se você adquiriu três números, qual a probabilidade de ganhar os dois prêmios?

Solução

O que o exercício pede é $P(G_1 \cap G_2)$.

$P(G_1 \cap G_2) = P(G_2|G_1)P(G_1) = \frac{2}{14} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$)=P

4. Os estudantes de um colégio, presentes em uma reunião, foram classificados por sexo e por opção da área de formação segundo o quadro abaixo:

Sexo / Opção	M	F
ADM	10	8
CC	6	5
EC	8	4

Calcular as probabilidades de que:
a. Alunas optem por Administração. *Resp: 8/17*
b. Aluno opte por Economia. *Resp: 1/3*
c. Seja aluno sabendo-se que optou por Ciências Contábeis. *Resp: 6/11*
d. Aluno opte por Ciências Contábeis. *Resp: 1/4*

5. Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas
a. sejam verdes? *Resp: 1/6*
b. Sejam da mesma cor? *Resp: 5/18*

Teorema do Produto

Do conceito de probabilidade condicional $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, em\ que\ P(B) > 0$ obtém-se o teorema do produto, também conhecido como **teorema da multiplicação**.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Generalizando para n eventos, temos:

$$P(A \cap B \cap C \ldots N)) = P(A)P(B|A)\ P(C|A \cap B) \ldots P(N|A \cap B \cap C \ldots .)$$

Independência Estatística

Dois eventos A e B são **independentes**, se a informação da ocorrência ou não de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é:

$P(A|B) = P(A)$ ou $P(B) > 0$

O que equivale à expressão:

$$P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(A|B) = P(A)\ .\ P(B)$$

A probabilidade de que eles se realizem simultaneamente é igual ao produto das probabilidades de realização dos dois eventos

Atenção!
Não é difícil verificar que se A é independente de B , então B é independente de A. Além disso, o uso da expressão acima nos permitiu verificar que o evento vazio (∅) é independente de qualquer evento.

Exemplo – Lançando dois dados honestos simultaneamente, qual a probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado (evento A)e 5 no segundo dado (evento B)?

A probabilidade de se obter 1 no primeiro dado é (1/6) e de se obter 5 no segundo também é (1/6). Logo, a probabilidade de obtermos , simultaneamente, 1 no primeiro e 5 no segundo é:

$P(A \cap B) = P(A).)(B) = (1/6) \times (1/6) = 1/36$

Exercício do Moretin p. 23

A probabilidade de que um home esteja vivo daqui a 30 anos é 2/5; a de sua mulher é de 2/3. Determinar a probabilidade de que daqui a 30 anos:

a. ambos estejam vivos;
b. somente o homem esteja vivo;
c. somente a mulher esteja viva;
d. nenhum esteja vivo;
e. pelo menos um esteja vivo

Solução

Chamaremos de H: homem estar vivo daqui a 30 anos. P(H)= 2/5 P($\tilde{H}$)=3/5

M: mulher estar viva daqui a 30 anos. P(M)= 2/3 P($\tilde{M}$)=1/3

a. $P(H \cap M) = P(H).P(M) = (2/5).(2/3) = 4/15$

b. $P(H \cap \tilde{M}) = P(H).P(\tilde{M}) = (2/5).(1/3) = 2/15$

c. $P(\tilde{H} \cap M) = P(\tilde{H}).P(M) = (3/5).(2/3) = 2/5$

d. $P(\tilde{H} \cap \tilde{M}) = P(\tilde{H}).P(\tilde{M}) = (3/5).(1/3) = 1/5$

e. $P(H \cup M) = P(H)+P(M)-P(H \cap M) = (2/5)+(2/3)-(4/15) = 12/15 = 4/5$ outro jeito P(pelo menos um vivo) = 1- P(nenhum vivo) = 1 – (1/5) = 4/5