PROBABILIDADES

Distribuições de Probabilidade
Distribuição Normal

BERTOLO

PRELIMINARES

Quando aplicamos a Estatística na resolução de situações-problema, verificamos que muitas delas apresentam as mesmas características; o que nos permite estabelecer um modelo estatístico teórico para a determinação da resolução destas situações-problema.

Este modelo estatístico teórico, também conhecido por **distribuição de probabilidades**, apresenta algumas características principais, entre estas:

I. Os possíveis valores que a variável aleatória pode assumir;

II. A função de probabilidade associada à variável aleatória ;

III. A média (ou valor esperado) da variável aleatória ;

IV. A variância e o desvio-padrão da variável aleatória .

Neste contexto, vamos estudar algumas das principais distribuições de probabilidades discretas entre elas, a **distribuição binomial** e a **distribuição de Poisson**. E, entre as distribuições de probabilidades contínuas, a **distribuição normal**.

Distribuição Normal (contínua)

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2. É considerada a mais importante e freqüente distribuição utilizada na Estatística e, em quase todos os processos industriais o comportamento da variável, em estudo, é semelhante ao apresentado pela distribuição normal, ou seja, num processo qualquer, com média μ (lê-se *mi*) e desvio padrão σ (lê-se *sigma*), observamos que:

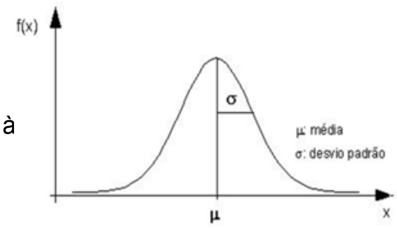
É uma distribuição de v.a. Contínua e considerada a mais importante e frequente distribuição utilizada em estatística.
Quase todos os processos industriais têm com-portamento ditado pela Normal.

I. A maioria dos valores se concentra ao redor da média.

II. 50% dos valores estão acima da média, e 50% abaixo da média.

III. Os valores distribuem-se simetricamente à esquerda e à direita em relação à média.

IV. É praticamente nula a probabilidade de um valor afastar-se muito da média.



Logo, pelas **propriedades** do **valor esperado** $E(X)$ e da **variância** σ^2, segue que:

$$E(X)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right]=0.$$

$$Var(X)=Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}Var(X)=1$$

Distribuição Normal cont....

Todas as variáveis normais, como por exemplo, a altura das pessoas, o peso de um produto, etc. são resolvidas reduzindo-as à chamada variável normal reduzida z definida por :

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

Atenção! Observe que a transformação realizada não "afeta" a normalidade e, assim a variável terá distribuição normal com média 0 e variância 1, isto é, $Z \sim N(0,1)$ e, será denotada de **normal padrão** ou n**ormal reduzida.**

$$P(a \le X \le b) = P(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Desta forma, quaisquer que sejam os valores de μ e σ, utilizamos a n**ormal padrão** para obter probabilidades com distribuição normal. Os valores para a probabilidade $P(0 \le Z \le z), z>0$ são tabelados e apresentados na **Tabela de distribuição normal**, (disponível ao final deste capítulo).

Note que a simetria também implica que a probabilidade de estar *acima* (ou *abaixo*) de zero é 0,5. E como probabilidade é sempre um valor entre 0 e 1; a **Tabela de distribuição normal** contém apenas a parte decimal.

Considerando $X \sim N(2,9)$ temos,

$$P(a \le X \le b) = P(a-\mu \le X-\mu \le b-\mu)$$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \rightarrow \text{No exemplo, } \mu=2$$

$$P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Supondo, $X \in [2,5]$

$$P(2 \le X \le 5) = P\left(\frac{2-2}{\sqrt{9}} < \frac{X-2}{\sqrt{9}} < \frac{5-2}{\sqrt{9}}\right) =$$

$$= P(0 < Z < 1) = 0,3413$$

Exemplo

Considerando a mesma distribuição supracitada, X ~ N(2,3), encontre a probabilidade a seguir:

$$P(X > 3) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3-2}{3}\right) = P\left(Z > \frac{1}{3}\right)$$
$$= 0{,}5 - P\left(0 \le Z \le \frac{1}{3}\right) = 0{,}5 - 0{,}1293 = 0{,}3707$$

Para encontrar o valor 0,1293, resultante da probabilidade P(0 ≤ Z ≤ 1/3) na **Tabela de distribuição normal**, basta realizar a intersecção da linha Z_0 correspondente ao valor 0,3 com a coluna assumindo o valor 0,03; resultado da aproximação da razão 1/3 ≅ 0,33.

Esta tabela completa se encontra no último slide

Tabela Distribuição Normal - Valores de $P(0 \le Z \le z_0)$

z0	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,000000	0,003989	0,007978	0,011966	0,015953	0,019939	0,023922	0,027903	0,031881	0,035856
0,1	0,039828	0,043795	0,047758	0,051717	0,055670	0,059618	0,063559	0,067495	0,071424	0,075345
0,2	0,079260	0,083166	0,087064	0,090954	0,094835	0,098706	0,102568	0,106420	0,110261	0,114092
0,3	0,117911	0,121720	0,125516	0,129300	0,133072	0,136831	0,140576	0,144309	0,148027	0,151732
0,4	0,155422	0,159097	0,162757	0,166402	0,170031	0,173645	0,177242	0,180822	0,184386	0,187933

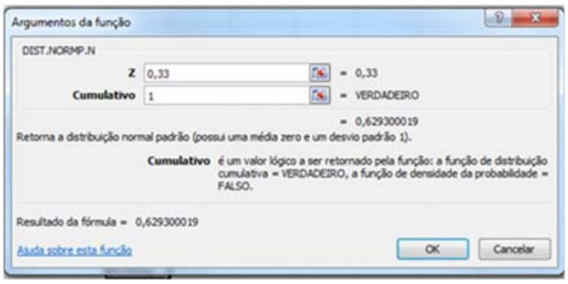
Exemplo – No Excel

Para encontrar o valor 0,1293, resultante da probabilidade P(0 ≤ Z ≤ 1/3) no Excel:

Numa célula qualquer, digitamos =DIST.NORMP.N(0,33;1)-0,5.

Subtraimos 0,5, pois o cumulativo do Excel não começa no zero e sim no - ∞.

Se quisermos usar o assistente (wizard) de fórmulas do Excel, não podemos esquecer de subtrair 0,5 do resultado. Assim:



0,6293 – 0,5 = 0,1293

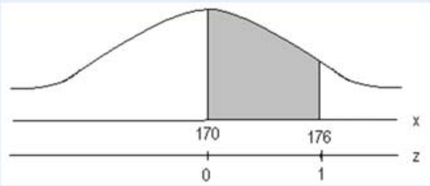
Exemplo 2

A altura dos alunos do IMES-Fafica é normalmente distribuída com a média de 170cm, e desvio padrão 6cm . Determine a probabilidade de um aluno, aleatoriamente selecionado, ter altura:

a) entre 170 e 176 cm;
b) entre 164 e 176 cm;
c) entre 176 e 182 cm;
d) acima de 182 cm.

Temos, primeiramente, que encontrar a *variável normal reduzida* z: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

a)



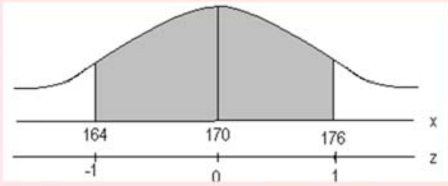
$$z = \frac{170 - 170}{6} = 0$$

$$z = \frac{176 - 170}{6} = 1$$

$P(170 \le x \le 176) = P(0 \le z \le 1) = 0{,}3413$ ou 34,13% .

0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438

b)



$$P(164 \le x \le 176) = P\left(\frac{164 - 170}{6} \le z \le \frac{176 - 170}{6}\right) =$$

$P(-1 \le z \le 1) = P(-1 \le z \le 0) + p(o \le z \le 1)$ . .

Como é possível observar, dividimos a probabilidade em duas: uma parte do lado esquerdo da curva e a outra do lado direito; a do lado esquerdo, transformamos por simetria para o lado direito; a do lado direito, obtemos pela localização dos valores de P e de z na tabela de distribuição normal.

$P(-1 \le z \le 1) = P(0 \le z \le 1)$, por simetria.

Então, $P(0 \le z \le 1) = 2P(0 \le z \le 1) = 2.\ 0{,}3413 = 0{,}6826$ ou 68,26% . .

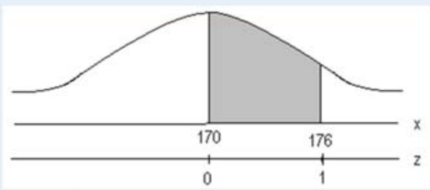
Exemplo 2 – No Excel

A altura dos alunos do IMES-Fafica é normalmente distribuída com a média de 170cm, e desvio padrão 6cm . Determine a probabilidade de um aluno, aleatoriamente selecionado, ter altura:

a) entre 170 e 176 cm;
b) entre 164 e 176 cm;
c) entre 176 e 182 cm;
d) acima de 182 cm.

Temos, primeiramente, que encontrar a *variável normal reduzida* z: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

a)

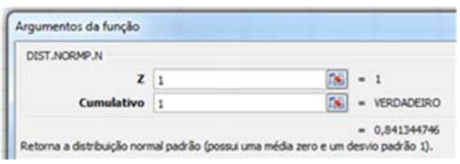


$$z = \frac{170 - 170}{6} = 0$$

$$z = \frac{176 - 170}{6} = 1$$

$P(170 \le x \le 176) = P(0 \le z \le 1) = 0{,}3413$ ou 34,13% .

a. Numa célula qualquer digitamos: **=DIST.NORMP.N(1;1)-0,5**, pois o cumulativo do Excel inicia-se em $-\infty$ e a tabela em 0. Então, 0,8413 – 0,5 = 0,3413 ou 34,13%.



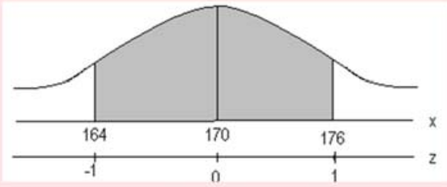
Exemplo 2 – No Excel

A altura dos alunos do IMES-Fafica é normalmente distribuída com a média de 170cm, e desvio padrão 6cm . Determine a probabilidade de um aluno, aleatoriamente selecionado, ter altura:

a) entre 170 e 176 cm;
b) entre 164 e 176 cm;
c) entre 176 e 182 cm;
d) acima de 182 cm.

Temos, primeiramente, que encontrar a *variável normal reduzida* z: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

b)



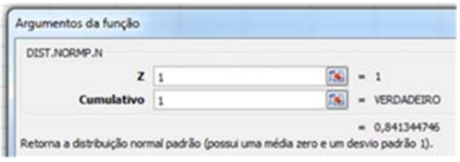
$$P(164 \le x \le 176) = P\left(\frac{164-170}{6} \le z \le \frac{176-170}{6}\right) =$$

$$P(-1 \le z \le 1) = P(-1 \le z \le 0) + p(0 \le z \le 1)\ ..$$

Como é possível observar, dividimos a probabilidade em duas: uma parte do lado esquerdo da curva e a outra do lado direito; a do lado esquerdo, transformamos por simetria para o lado direito; a do lado direito, obtemos pela localização dos valores de P e de z na tabela de distribuição normal.

$P(-1 \le z \le 1) = P(0 \le z \le 1)$, por simetria.

Então, $P(0 \le z \le 1) = 2P(0 \le z \le 1) = 2.\ 0{,}3413 = 0{,}6826$ ou 68,26% . .



Exemplo 2 – No Excel

A altura dos alunos do IMES-Fafica é normalmente distribuída com a média de 170cm, e desvio padrão 6cm . Determine a probabilidade de um aluno, aleatoriamente selecionado, ter altura:

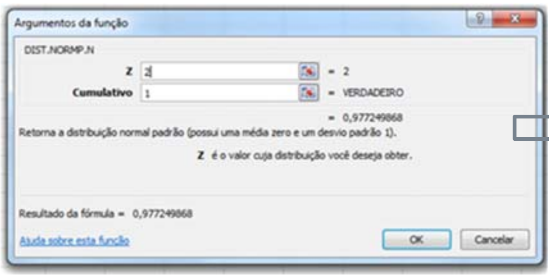
a) entre 170 e 176 cm;
b) entre 164 e 176 cm;
c) entre 176 e 182 cm;
d) acima de 182 cm.

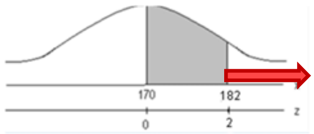
Temos, primeiramente, que encontrar a *variável normal reduzida* z: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$.

A variável z correspondente à 182 é dada por:

$$z = \frac{182-170}{6} = 2$$

d. Numa célula qualquer digitamos: DIST.NORMP.N(2;1)-0,5, pois o cumulativo do Excel inicia-se em -∞ e a tabela em 0. Então, 0,97725 – 0,5 = 0,477253 ou 47,73% dos alunos tem suas alturas compreendidas entre 170 e 182 cm. Acima de 182 cm está a porcentagem de alunos que falta para completar 50%, isto é, **2,27%** dos alunos.





O item c, agora fica:
0,5 – 0,0227 – 0,3413 = **0,136 ou 13,6%**

ATIVIDADE 05

Uma variedade de soja, sofrendo de certa praga, é submetida a um controle intensivo, cujo tempo foi modelado por uma densidade normal, com média 15 e desvio padrão 2 (em dias). Calcule . Apresente a conclusão para o resultado obtido.

Solução

Seja X o tempo de extermínio da praga e, assim temos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, isto é, $X \sim N(15, 4)$. Como desejamos saber qual a proporção, dessa variedade de soja, que demora mais de 17 dias para o extermínio da praga, calculamos:

$$P(X > 17) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{17-15}{\sqrt{4}}\right) = P(Z > 1)$$

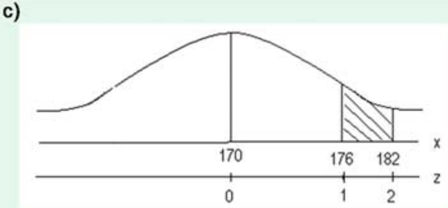
$$= 0,5 - P(0 \le Z < 1) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

Portanto, a proporção dessa variedade de soja em demorar mais de 17 dias para o extermínio da praga é de 15,87%.

Atenção! Para encontrar o valor 0,3413, resultante da probabilidade $P(0 \le Z < 1)$ na Tabela de distribuição normal, basta realizar a leitura da coluna z_0 correspondente ao valor 1 e**, subtrair** *de* 0,5 o valor encontrado.

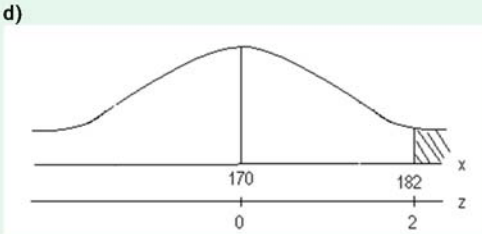
Exemplo 2 cont....

c)



P(176 ≤ 182) = P(1 ≤ z ≤ 2) =
P(0 ≤ z ≤ 2) - P(0 ≤ z ≤ 1) = 0,4772 - 0,3413 = 1,1359 ou 13,59%.

d)



0,8	0,2881
0,9	0,3159
1,0	0,3413
1,1	0,3643
1,2	0,3849
1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452
1,7	0,4554
1,8	0,4641
1,9	0,4713
2,0	0,4772
2,1	0,4821

P(x >182) = P(z >2) = 0,5 - P(0 ≤ z ≤ 2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228 ..

Lembre-se que todo o ramo direito da curva tem probabilidade de 50% ou 0,5.

Exercício

Exercício 1.4. Num processo industrial tem-se $\mu = 10{,}00$ com $\sigma = 0{,}02$. Qual é a probabilidade de se encontrar, numa amostra retirada aleatoriamente desse processo, um resultado igual ou maior que:

a) 10,03 ? b) 10,04 ?

<u>Resposta</u> (comparar com a figura 1):

a) $P_{(X > 10{,}03)} \Rightarrow z = (10{,}03 - 10{,}00)/0{,}02 = 1{,}5 \Rightarrow A = 0{,}4332$
Resultado: $0{,}50 - 0{,}4332 = 6{,}68\%$

b) $P_{(X > 10{,}04)} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow A = 0{,}4772$
Resultado: $0{,}50 - 0{,}4772 = 2{,}28\%$.

Exercício 1.5. Numa panificadora admite-se que um pacote de 1 kg pode ter uma variação de ± 10 g. Qual é a probabilidade de ser encontrado um pacote com:

a) 1015 g?
b) Mais de 1015 g?

b) A probabilidade de se encontrar um pacote com qualquer peso maior que 1015 g é dada pela integral (área sob a curva normal) no intervalo colorido de cinza da figura 1. O cálculo é realizado como segue:
$P_{(X > 1015)} \Rightarrow z = (1015 - 1000)/10 = 1{,}5 \Rightarrow A = 0{,}4332$

Resultado: $0{,}50 - 0{,}4332 = 6{,}68\%$

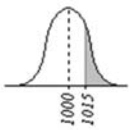


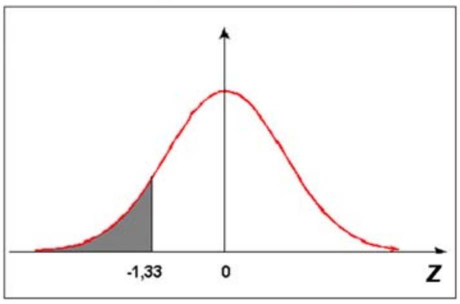
Figura 1

Exercício

O tempo gasto no exame vestibular de uma universidade tem distribuição Normal, com média 120 min e desvio padrão 15 min.
a) Sorteando um aluno ao acaso, qual é a probabilidade que ele termine o exame antes de 100 minutos?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120;\ 15^2)$

$$P(X < 100) = P\left(Z \le \frac{100 - 120}{15}\right) = P(Z \le -1{,}33)$$



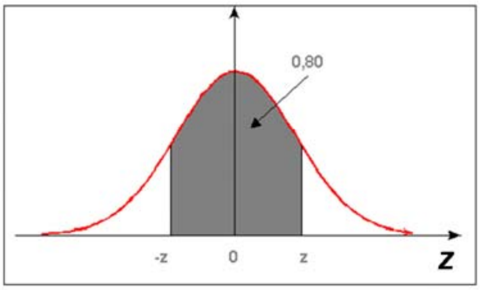
$$= 1 - A(1{,}33)$$
$$= 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

Exercício

b) Qual deve ser o tempo de prova de modo a permitir que 95% dos vestibulandos terminem no prazo estipulado?

X: tempo gasto no exame vestibular $\Rightarrow X \sim N(120, 15^2)$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = 0{,}80 \Rightarrow P\left(\frac{x_1 - 120}{15} \le Z \le \frac{x_2 - 120}{15}\right) = 0{,}80$$



$z = ?$ tal que $A(z) = 0{,}90$

Pela tabela, $z = 1{,}28$.

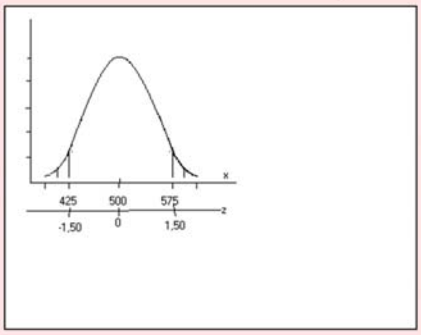
$$\frac{x_1 - 120}{15} = -1{,}28 \Rightarrow x_1 = 120 - 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_1 = 100{,}8 \text{ min.}$$

$$\frac{x_2 - 120}{15} = 1{,}28 \Rightarrow x_2 = 120 + 1{,}28 \times 15 \Rightarrow x_2 = 139{,}2 \text{ min.}$$

Desafio I Normal

1. A durabilidade de um certo componente eletrônico é normalmente distribuída com média de 500 dias e desvio padrão de 50 dias. Qual a probabilidade de um componente qualquer durar:
a) entre 425 e 575 dias;
b) mais de 575 dias;
c) menos de 575 dias;
d) qual o número de dias necessários para se repor, no máximo, 10% dos componentes?

$\mu = 500$ e
$\sigma = 50$



b) $P(x > 575) = P\left(z > \frac{575 - 500}{50}\right) =$

$P(z > 1{,}50) = 0{,}50 - P(0 < z < 1{,}50) =$

$0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668$ ou $6{,}68\%$.

c)

$P(x < 575) = P(z < 1{,}50) = 0{,}50 + P(0 < Z < 1{,}50) =$

$0{,}50 + 0{,}4332 = 0{,}9332$ ou $93{,}32\%$.

1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452

a) $P(425 < x < 575) =$

$P\left(\frac{425 - 500}{50} < z < \frac{575 - 500}{50}\right) = P(-1{,}50 < z < 1{,}50) =$

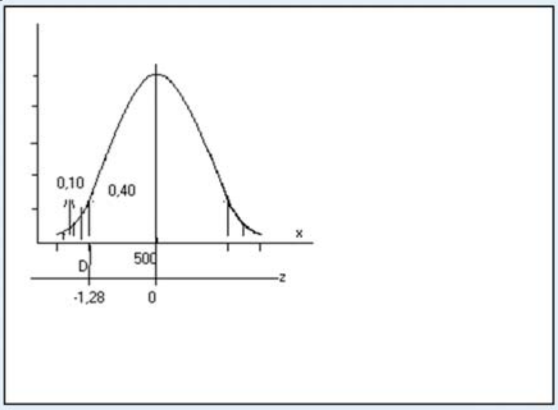
$P(-1{,}50 < z < 0) + P(0 < z < 1{,}50) =$

$P(0 < z < 1{,}50) + P(0 < z < 1{,}50) =$

$2P(0 < z < 1{,}50) = 2.(0{,}4332) = 08664$ ou $86{,}64\%$.

Desafio I cont....

d)



A Tabela da Distribuição Normal somente nos fornece valores à direita da média, portanto com z positivo. Pelo gráfico ao lado do nosso problema, vemos que z se encontra à esquerda da média, portanto será negativo e deverá ser determinado por simetria.

Vemos que entre D e a média 500, temos 40% de probabilidade. Temos aí o problema de leitura inversa de z, que deverá ser determinado. Lendo na tabela da normal os valores das **probabilidades,** temos 0,3997 e 0,4015 como os valores mais próximos de 0,40 ou 40% e escolhemos, portanto, o valor 0,3997 (mais próximo de 0,40), que corresponde na tabela ao valor de z = 1,28. Mas, lembre-se que a tabela fornece somente valores positivos de z (à direita da média); portanto, o nosso z será = -1,28, pois se encontra à esquerda da média.

Como $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1{,}28 = \dfrac{D-500}{50} \Rightarrow D = 500 - 64 = 436$ dias.

Desafio I

2. Numa distribuição normal, 50% dos dados são inferiores a 200, e 34,13% estão entre 200 e 250. Calcule a média e o desvio padrão da distribuição normal.

Distribuição Normal:
Como na Distribuição Normal 50% dos dados estão abaixo da média, nesse caso a média será igual a 200, portanto μ = 200.
Teremos, então, que $P(200 < x < 250) = 0{,}3413 \Rightarrow P(0 < z < z_0) = 0{,}3413$.
Lendo, na tabela da normal, o valor de z, que corresponde a uma probabilidade 0,3413, encontramos que z_0 = 1. E esse valor de z corresponde ao valor de x = 250.
Temos, então $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1 = \dfrac{250-200}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 50$. Assim, μ = 200 e σ = 50.

Tarefa para casa!!!!

1. As notas de uma avaliação são normalmente distribuídas, com média 70 e desvio padrão 8. Determine a porcentagem dos alunos que têm nota:

a) entre 70 e 74;
b) acima de 74;
c) abaixo de 62;
d) entre 62 e 78.

$\mu = 70$ e $\sigma = 8$

a) $P(70 < x < 74) = P\left(\frac{70-70}{8} < z < \frac{74-70}{8}\right) = P(0 < z < 0{,}50) = 0{,}1915$ ou 19,15%.

b) P(x > 74) = P(z > 0,50) = 0,50 – P(0 < z < 0,50) = 0,50 – 0,1915 = 0,3085 ou 30,85%.

c) P(x < 62) =

$P\left(z < \frac{62-70}{8}\right) = P(z < -1) = P(z > 1) =$

$0{,}5 - P(0 < z < 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$.

d) $P(62 < x < 78) = P\left(\frac{62-70}{8} < z < \frac{78-70}{8}\right) = P(-1 < z < 1) =$

$2P(0 < z < 1) = 2.0{,}3413 = 0{,}6826$.

0,8	0,2881	0,2910
0,9	0,3159	0,3186
1,0	0,3413	0,3438

0,3	0,1179
0,4	0,1554
0,5	0,1915
0,6	0,2257

Tarefa para casa!!!!

2. Certas lâmpadas têm durabilidade, normalmente distribuídas, com média de 5.000 horas e desvio padrão de 100 horas. Determine a probabilidade de uma lâmpada qualquer durar:

a) entre 4.900 e 5.150 horas;
b) acima de 5.100 horas;
c) abaixo de 4.800 horas;
d) abaixo de 5.150 horas.

$\mu = 5000$ e $\sigma = 100$

a) $P(4900 < x < 5150) = P\left(\frac{4900-5000}{100} < z < \frac{5150-5000}{100}\right) = P(-1 < z < 1{,}50) =$

$= P(-1 < z < 0) + P(0 < z < 1{,}50) = P(0 < z < 1) + P(0 < z < 1{,}50) =$

$0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745$.

b) $P(x > 5100) = P\left(z > \frac{5100-5000}{100}\right) =$

$P(z > 1) = 0{,}5 - P(0 < z < 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$.

c) $P(x < 4800) = P\left(z < \frac{4800-5000}{100}\right) = P(z < -2) = P(z > 2) =$

$0{,}5 - P(0 < z < 2) = 0{,}50 - 0{,}4772 = 0{,}0228$.

d) $P(x < 5150) = P\left(z < \frac{5150-5000}{100}\right) = P(z < 1{,}50) = 0{,}50 + 0{,}4332 = 0{,}9332$.

1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452

Tarefa para casa!!!!

3. Certo produto tem peso normalmente distribuído com média 20 e desvio padrão 1. Qual a probabilidade de um produto aleatoriamente selecionado pesar:
a) entre 19 e 21;
b) mais de 20;
c) mais de 21;
d) menos de 21.

$\mu = 20$ e $\sigma = 1$
a)

$$P(19 < x < 21) = P\left(\frac{19-20}{1} < z < \frac{21-20}{1}\right) = P(-1 < z < 1) = 2P(0 < z < 1) = 2.0,3413 = 0,6826$$

b) $P(x > 20) = P(z > 0) = 0,50$ ou 50% (acima da média temos 50% de probabilidade).

c) $P(x > 21) = P\left(z > \frac{21-20}{1}\right) = P(z > 1) = 0,50 - P(0 < z < 1) = 0,50 - 0,3413 = 0,1587$.

d) $P(x < 21) = 1 - P(x > 21) = 1 - 0,1587 = 08413$ (P(x>21) foi calculado no item anterior).

Tarefa para casa!!!!

4. Em indivíduos sadios o consumo renal de oxigênio tem distribuição normal de média 12 cm³ por minuto, e desvio padrão 1,5 cm³ por minuto. Determinar a proporção de indivíduos sadios com consumo renal:
a) Entre 9,4 e 13,2 cm³ por minuto;
b) Acima de 10 cm³ por minuto.

Distribuição Normal com $\mu = 12$ e $\sigma = 1,5$

a) $P(9,4 < x < 13,2) = P\left(\frac{9,4-12}{1,5} < z < \frac{13,2-12}{1,5}\right) =$

$P(-1,73 < z < 0,80) = 0,4582 + 0,2881 = 0,7463$.

b) $P(x > 10) = P\left(z > \frac{10-12}{1,5}\right) = P(z > -1,33) = 0,4082 + 0,5 = 0,9082$

0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664

Tarefa para casa!!!!

5. O tempo de atendimento de um cliente num banco é uma variável normalmente distribuída, com média de 15 min e desvio padrão de 3 min. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido em:

a) mais de 15 min;
b) entre 15 e 18 min;
c) entre 12 e 15 min;
d) entre 12 e 18 min.

0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664

a) $P(x>15)=P(z>0)=0{,}5$ ou 50%.

b) $P(15<x<18)=P\left(\frac{15-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(0<z<1)=0{,}3413$

c) $P(12<x<15)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{15-15}{3}\right)=P(-1<z<0)=P(0<z<1)=0{,}3413$.

d)

$P(12<x<18)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(-1<z<1)=2.P(0<z<1)=2.0{,}3413=0{,}6826$

Tarefa para casa!!!!

5. Uma distribuição de variável normal tem média 100 e desvio padrão 20. Qual a probabilidade dessa variável estar:

a) acima de 100;
b) entre 90 e 100;
c) acima de 110.

Distribuição Normal com μ = 100 e σ = 20

a) $P(x>100)=P(z>0)=0{,}5$ ou 50%.

b)

$P(90<x<100)=P\left(\frac{90-100}{20}<z<\frac{100-100}{20}\right)=P(-0{,}50<z<0)=P(0<z<0{,}50)=0{,}1915$.

c) $P(x>110)=P\left(z>\frac{110-100}{20}\right)=P(z>0{,}50)=0{,}50-P(0<z<0{,}50)=$

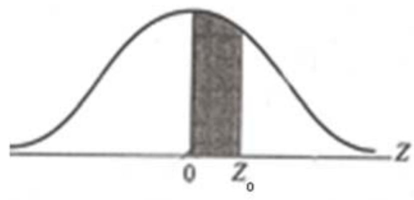
$0{,}50-0{,}1915=0{,}3085$.

0,4	0,1554
0,5	0,1915
0,6	0,2257

Tabela de Distribuição Normal Padronizada

z0	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,000000	0,003989	0,007978	0,011966	0,015953	0,019939	0,023922	0,027903	0,031881	0,035856
0,1	0,039828	0,043795	0,047758	0,051717	0,055670	0,059618	0,063559	0,067495	0,071424	0,075345
0,2	0,079260	0,083166	0,087064	0,090954	0,094835	0,098706	0,102568	0,106420	0,110261	0,114092
0,3	0,117911	0,121720	0,125516	0,129300	0,133072	0,136831	0,140576	0,144309	0,148027	0,151732
0,4	0,155422	0,159097	0,162757	0,166402	0,170031	0,173645	0,177242	0,180822	0,184386	0,187933
0,5	0,191462	0,194974	0,198468	0,201944	0,205401	0,208840	0,212260	0,215661	0,219043	0,222405
0,6	0,225747	0,229069	0,232371	0,235653	0,238914	0,242154	0,245373	0,248571	0,251748	0,254903
0,7	0,258036	0,261148	0,264238	0,267305	0,270350	0,273373	0,276373	0,279350	0,282305	0,285236
0,8	0,288145	0,291030	0,293892	0,296731	0,299546	0,302337	0,305105	0,307850	0,310570	0,313267
0,9	0,315940	0,318589	0,321214	0,323814	0,326391	0,328944	0,331472	0,333977	0,336457	0,338913
1	0,341345	0,343752	0,346136	0,348495	0,350830	0,353141	0,355428	0,357690	0,359929	0,362143
1,1	0,364334	0,366500	0,368643	0,370762	0,372857	0,374928	0,376976	0,379000	0,381000	0,382977
1,2	0,384930	0,386861	0,388768	0,390651	0,392512	0,394350	0,396165	0,397958	0,399727	0,401475
1,3	0,403200	0,404902	0,406582	0,408241	0,409877	0,411492	0,413085	0,414657	0,416207	0,417736
1,4	0,419243	0,420730	0,422196	0,423641	0,425066	0,426471	0,427855	0,429219	0,430563	0,431888
1,5	0,433193	0,434478	0,435745	0,436992	0,438220	0,439429	0,440620	0,441792	0,442947	0,444083
1,6	0,445201	0,446301	0,447384	0,448449	0,449497	0,450529	0,451543	0,452540	0,453521	0,454486
1,7	0,455435	0,456367	0,457284	0,458185	0,459070	0,459941	0,460796	0,461636	0,462462	0,463273
1,8	0,464070	0,464852	0,465620	0,466375	0,467116	0,467843	0,468557	0,469258	0,469946	0,470621
1,9	0,471283	0,471933	0,472571	0,473197	0,473810	0,474412	0,475002	0,475581	0,476148	0,476705
2	0,477250	0,477784	0,478308	0,478822	0,479325	0,479818	0,480301	0,480774	0,481237	0,481691
2,1	0,482136	0,482571	0,482997	0,483414	0,483823	0,484222	0,484614	0,484997	0,485371	0,485738
2,2	0,486097	0,486447	0,486791	0,487126	0,487455	0,487776	0,488089	0,488396	0,488696	0,488989
2,3	0,489276	0,489556	0,489830	0,490097	0,490358	0,490613	0,490863	0,491106	0,491344	0,491576
2,4	0,491802	0,492024	0,492240	0,492451	0,492656	0,492857	0,493053	0,493244	0,493431	0,493613
2,5	0,493790	0,493963	0,494132	0,494297	0,494457	0,494614	0,494766	0,494915	0,495060	0,495201
2,6	0,495339	0,495473	0,495604	0,495731	0,495855	0,495975	0,496093	0,496207	0,496319	0,496427
2,7	0,496533	0,496636	0,496736	0,496833	0,496928	0,497020	0,497110	0,497197	0,497282	0,497365
2,8	0,497445	0,497523	0,497599	0,497673	0,497744	0,497814	0,497882	0,497948	0,498012	0,498074
2,9	0,498134	0,498193	0,498250	0,498305	0,498359	0,498411	0,498462	0,498511	0,498559	0,498605
3	0,498650	0,498694	0,498736	0,498777	0,498817	0,498856	0,498893	0,498930	0,498965	0,498999
3,1	0,499032	0,499065	0,499096	0,499126	0,499155	0,499184	0,499211	0,499238	0,499264	0,499289
3,2	0,499313	0,499336	0,499359	0,499381	0,499402	0,499423	0,499443	0,499462	0,499481	0,499499
3,3	0,499517	0,499534	0,499550	0,499566	0,499581	0,499596	0,499610	0,499624	0,499638	0,499651
3,4	0,499663	0,499675	0,499687	0,499698	0,499709	0,499720	0,499730	0,499740	0,499749	0,499758
3,5	0,499767	0,499776	0,499784	0,499792	0,499800	0,499807	0,499815	0,499822	0,499828	0,499835
3,6	0,499841	0,499847	0,499853	0,499858	0,499864	0,499869	0,499874	0,499879	0,499883	0,499888
3,7	0,499892	0,499896	0,499900	0,499904	0,499908	0,499912	0,499915	0,499918	0,499922	0,499925
3,8	0,499928	0,499931	0,499933	0,499936	0,499938	0,499941	0,499943	0,499946	0,499948	0,499950
3,9	0,499952	0,499954	0,499956	0,499958	0,499959	0,499961	0,499963	0,499964	0,499966	0,499967
4	0,499968	0,499970	0,499971	0,499972	0,499973	0,499974	0,499975	0,499976	0,499977	0,499978

Distribuição Normal: N(0,1)



$P(0 < Z < Z_0)$