REVISÃO DO CONTEÚDO ATÉ HOJE

Conhecendo o cálculo da probabilidade

BERTOLO

OBJETIVOS

- Definir probabilidade;
- Identificar situações práticas às quais se aplica a probabilidade;
- Definir experimento, espaço amostral e evento;
- Distinguir as três definições de probabilidade: clássica, frequentista e subjetiva;
- Identificar situações práticas em que cada uma das definições de probabilidade é aplicada;
- Calcular probabilidades;
- Aplicar o princípio básico da regra de Bayes na resolução de situações-problema.

Esquema do Capítulo

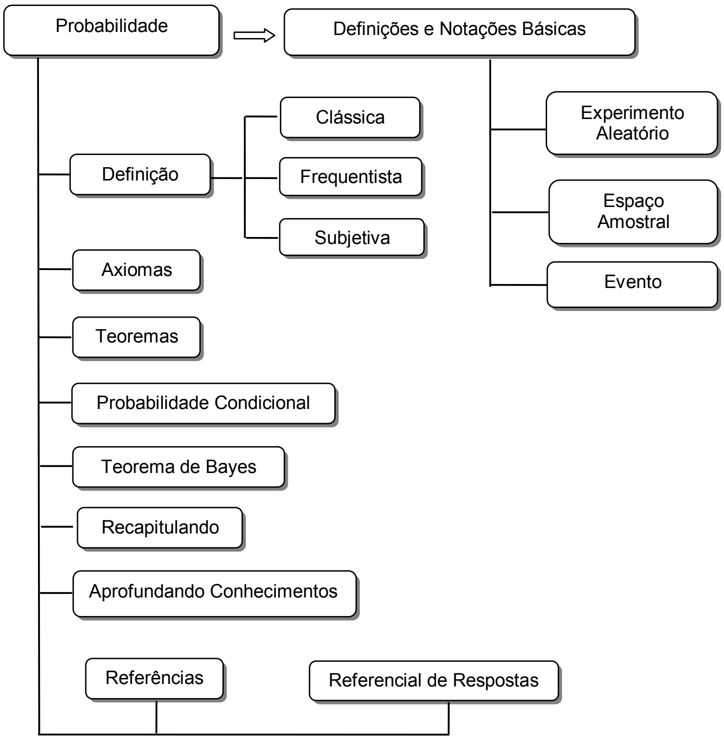


Figura 1 Esquema do capítulo

Perguntas Iniciais

O que é probabilidade para você? Por que estudá-la?

Você se recorda de algum fato, momento ou informações de seu cotidiano que transmite "idéias" de probabilidade?

Serve para entender e quantificar todas as DECISÕES envolvendo chances de acontecimentos!!!!

É comum isto nas nossas vidas???

É tão comum isto que TODO mundo terá que aprender PROBABILIDADES!

MAS O QUE É DECISÃO?

Já vimos que é um conjunto de ações planejadas AGORA para serem executadas no FUTURO.

O FUTURO É CERTO ou INCERTO?

A probabilidade serve apenas para as tomadas de decisões?

Na vida existem coisas que estão além das nossas decisões e para serem compreendidas precisam também de probabilidade. Por exemplo não sou eu quem decide se vai chover ou não, mas sou eu quem decide se vai levar o guarda-chuva.

Papo Inicial

FENÔMENO – Tudo aquilo que é percebido pelos sentidos ou pela consciência. Ex: fenômenos da natureza, fenômenos sociais, etc.

Fenômeno natural – dando calor a um corpo, sua temperatura aumenta.

EVENTO – É qualquer ocorrência no meio. Ex: uma festa, acender uma lâmpada numa sala escura, etc. São mudanças nas condições físicas do meio e/ou psíquicas das pessoas.

Probabilidade é uma medida da chance de acontecer (futuro) um fenômeno!!!!

Probabilidade se refere ao futuro!!!

O FUTURO É CERTO ou INCERTO? Sim e/ou Não

EXPERIMENTO – É a reprodução de um fenômeno para estudo e compreensão.

Quais são os tipos de fenômenos que podem acontecer no FUTURO?

Vimos que podem ser: determinísticos, com risco e de incerteza total

Papo Inicial

FENÔMENO DETERMINÍSTICO – São aqueles que repetidos sob as mesmas condições iniciais conduzem sempre a UM SÓ resultado. Ex: Reduzindo os custos aumento o lucro, qualquer fenômeno estudado pela física química ou biologia clássicas (fenômenos macroscópicos naturais).

Aqui conhecendo o presente, consigo determinar o futuro por meio de equações. Esta é a representação Cartesiana da realidade.

FENÔMENO ALEATÓRIO– São aqueles que repetidos sob as mesmas condições iniciais podem conduzir a mais de um resultado.

Os fenômenos aleatórios podem ocorrer de duas formas:

Risco – quando o resultado é previsível, porém indeterminado antes da sua ocorrência. Ex: Vai chover ou não? Vai sair cara ou coroa?

Incerteza Total – quando o resultado é imprevisível e, portanto, indeterminado antes da sua ocorrência. Ex: Quando o Bertolo vai Morrer? Quantos frangos o Marcel vai vender hoje no supermercado para encomendar ao fornecedor? Quando a Naira vai casar? Quantos filhos a Jéssica vai ter com o padre? Quantos beijos o Brunão vai dar sábado no Barretão?

Probabilidade no dia a dia - Importância

Hoje em dia, os meios de comunicação de massa ou mídias, entre eles os jornais, as revistas, o rádio, a televisão e, mais recentemente a Internet, popularizaram os conceitos e noções da **teoria das probabilidades**. Este fato contribuiu para a interação estimulante e flexível entre a teoria e o dia a dia das pessoas, desmistificando a associação inicial de probabilidade com os "jogos de azar".

Historicamente, o propósito dos estudiosos da teoria das probabilidades limitava-se aos estudos dos jogos de azar, cujo interesse estava voltado em planejar estratégias de apostas. A limitação no estudo da teoria das probabilidades retardou por muito tempo o seu desenvolvimento como disciplina no campo da Matemática. Até que Pierre-Simon de Laplace publica, em 1812, o livro *Theorie Analytique des Probabilités*, no qual aborda a definição clássica de probabilidade. A partir daí o progresso desta teoria não parou, novos estudos foram realizados ao longo do tempo, proporcionando aos estudiosos a aplicação da probabilidade na solução de diversos problemas presentes no cotidiano das pessoas.

Hoje, podemos encontrar diversos exemplos que ilustram a utilização e a aplicação das probabilidades. Por exemplo, a previsão de produção de milho para o próximo ano, a constatação de falha mecânica em um sistema de prevenção contra vazamento em uma usina nuclear, o preparo de um orçamento – municipal, hospitalar, etc., a avaliação do impacto de uma redução no número de funcionários de determinado setor de uma empresa, o cálculo dos custos da produção – cafeeira, de gado de corte, etc., a avaliação de associação entre implantes mamários e doença de tecido conjuntivo.

Perceba, portanto, que a probabilidade está muito mais presente na sua vida do que você, até então, poderia imaginar!

Probabilidade versus Estatística

Embora o cálculo das probabilidades pertença ao campo da Matemática, sua inclusão aqui se justifica pelo fato da maioria dos **fenômenos** de que trata a Estatística ser de natureza probabilística ou aleatórios. Do latim *alea* = sorte.

Procuramos resumir aqui os conhecimentos que julgamos necessários para termos um ponto de apoio em nossos primeiros passos a caminho da Estatística Inferencial.

Definições e Notação Básica

Os fenômenos determinísticos são tratados por meio de processos e otimização.

Os fenômenos aleatórios PREVISÍVEIS (com risco) são tratados por meio de probabilidades.

Experimento - É todo processo de realizar observações e obter dados.

Experimentos Aleatórios ou Estocásticos – são aqueles que , mesmo repetidos várias vezes sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis. Eles vislumbram o acaso.

EXEMPLO: O seu time ganhará a partida de hoje?

Três coisas podem acontecer:

a) Apesar do favoritismo, ele perca;

b) Que, como pensamos, ele ganhe;

c) Que empate.

Assim o resultado final depende do acaso.

Num experimento aleatório temos que:

- todos os resultados possíveis são conhecidos previamente;
- antes de cada realização, não se conhece com certeza o resultado que será obtido, daí a *incerteza*, conceito no qual se baseia a Teoria de Probabilidade;
- por fim, o experimento aleatório pode ser repetido em condições idênticas.

Definições e Notação Básica

O que é um **modelo probabilístico** para você?

Definimos modelo probabilístico como um modelo matemático baseado na teoria das probabilidades utilizado para descrever um **experimento aleatório**

Definições e Notação Básica – cont...

Espaço amostral - geralmente representado por S ou Ω (lê-se Ômega), como o conjunto de todos os **possíveis** e **diferentes** resultados, de natureza quantitativa ou qualitativa, de um experimento aleatório.

Exemplos:

- No lançamento de uma moeda honesta, o espaço amostral do experimento é Ω = {cara,coroa}.
- No lançamento de um dado, Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Dois lançamentos sucessivos de uma mesma moeda,

  Ω = {(Ca,Ca), (Ca,Co), (Co,Ca), (Co,Co)}
- Lançamento simultâneos de 2 dados,

  Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), ...,(6,6)}

Cada elemento de Ω que corresponde a um resultado recebe o nome de **ponto amostral**.

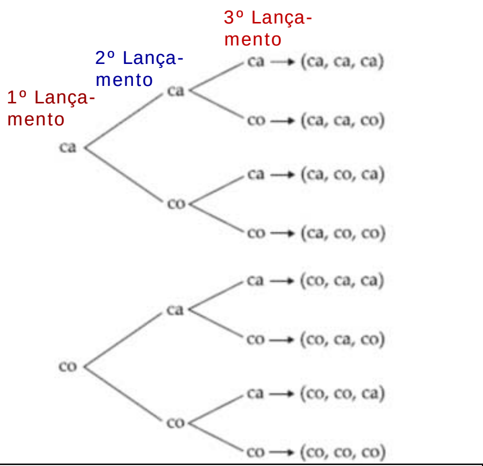
Exemplo de Espaço Amostral

1. Determinar o espaço amostral relativo aos experimentos abaixo:

a. Três lançamentos consecutivos de uma moeda comum.

Solução

Sendo ca = cara e co = coroa, temos:



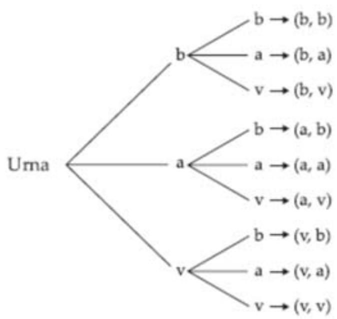
Resposta:

S ou **Ω** = {(ca, ca, ca), (ca, ca, co), (ca, co, ca), (ca, co, co), (co, ca, ca), (co, ca, co), (co, co, ca), (co, co, co)}

Nº de elementos de Ω: 8 = 2^3

b. Duas retiradas consecutivas e sem reposição de bolas de uma urna que contém 3 bolas brancas, 2 bolas azuis e 4 bolas vermelhas.

Solução



Resposta:

Ω= {(b, b), (b, a), (b, v), (a, b), (a, a), (a, v), (v, b), (v, a), (v, v)}

Na primeira retirada: 3 possibilidades

Na segunda retirada: 3 possibilidades

Se houvesse uma terceira retirada: 2 possibilidades (a azul não pode ser mais retirada)

Atividade 01

Defina o espaço amostral para cada um dos experimentos aleatórios a seguir:

a) Um Engenheiro, responsável pelo controle de qualidade no processo de produção, deseja escolher uma lâmpada comum e medir o seu tempo de vida útil.

$\Omega = \{t / t \geq 0\}$, em que t representa o tempo de vida útil. E podemos notar que inclui a possibilidade da lâmpada não acender logo no início do teste.

b) Considere o experimento que consiste no lançamento de dois dados.

Para facilitar visualizarmos o espaço amostral resultante no lançamento de dois dados, sugerimos a construção de uma tabela. Também é importante considerarmos D_1: dado 1 e D_2: dado 2.

Tabela 1 Valores obtidos, nas faces superiores, no lançamento de dois dados honestos.

D_2 \ D_1	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5,3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Portanto, o espaço amostral:

$\Omega = \{(1;1);(1;2);(1;3);...;(6;6)\}$

Atividade 01 – cont...

c) Um estagiário responsável pela produção de uma confecção pretende conhecer o número de peças íntimas defeituosas produzidas durante 1 hora.

$\Omega = \{X / X \geq 0\}$ em que X representa o número de peças defeituosas. E podemos concluir que X = 0 inclui a possibilidade de não se produzir nenhuma peça defeituosa em uma hora. Ou X = 1, logo $\Omega = \{0,1,2,...\}$.

d) Um técnico de segurança do trabalho quer estimar o nível de ruído, em decibéis, emitido por um prédio em construção na vizinhança.

Portanto, o espaço amostral é o conjunto de todos os números reais positivos, e com isto assume valor contínuo.

Definições e Notação Básica – cont...

Evento (representaremos por E maiúsculo) - é qualquer **subconjunto** do **espaço amostral** Ω de um experimento.

Exemplo: Considere o lançamento de um dado honesto, cujo espaço amostral é Ω = {1,2,3,4,5,6}. Nesta ação, há diversos eventos possíveis, dentre eles: obter a face menor do que 4, ou seja, E = {1,2,3} , ou, ainda, obter a face par, E = {2,4,6}, etc.

Se **E** = **S**, **E** é chamado de *evento certo*

Se **E** ⊂ **S** e **E** é um conjunto unitário, **E** é chamado *evento elementar*.

Se **E** = ∅, **E** é chamado *evento impossível*.

No lançamento de um dado, onde o espaço amostral é **S** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, temos os seguintes eventos:

A = {2, 4, 6} ⊂ S; logo, **A** é um evento de **S**

B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ⊂ **S**; logo, **B** é um evento certo de **S** (**B** = **S**)

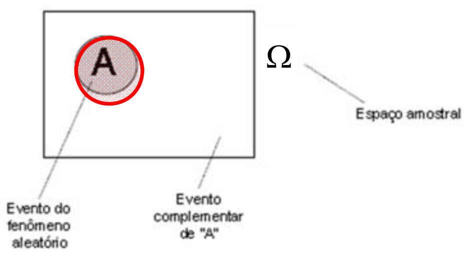
C = {4} ⊂ **S**; logo, **C** é um evento elementar de **S**

D = ∅ ⊂ **S**; logo, **D** é um evento impossível de **S**.

Definições e Notação Básica – cont...

OPERAÇÕES COM EVENTOS COMPLEMENTARES

O *complemento* de um evento **A** é o subconjunto formado pelos elementos do espaço amostral não incluídos no evento A.

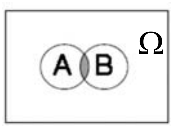


Por exemplo, o complemento do evento **A** = {CaCo, CoCa} é o evento **Ã** = {CaCa, CoCo}.

Note que: n(A) + n(Ã) = n(E)

Dois ou mais eventos de um mesmo espaço amostral podem ser agrupados em operações de união e interseção, assim definidas:

A operação *união* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formado pelos elementos comuns e não comuns dos dois conjuntos, **A** e **B**.



A operação *interseção* dos eventos **A** e **B** gera um novo evento formados apenas pelos elementos comuns aos dois conjuntos, **A** e **B**.

Vejamos algumas conseqüências das operações com eventos:

A *união* de um evento **A** e seu complemento **Ã** é o próprio espaço amostral S; isto é, **A** ∪ **Ã** = **S.**

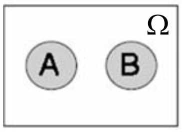
A *interseção* de um evento A e seu complemento é o conjunto vazio, isto é, **A** ∩ **Ã** = ∅**.**

Definições e Notação Básica

EVENTOS **MUTUAMENTE EXCLUDENTES** E **COLETIVAMENTE EXAUSTIVOS**

Os resultados possíveis do lançamento de uma moeda são apenas dois, os eventos elementares *Ca* e *Co*. Pela própria característica do experimento, se o resultado de um lançamento for cara este resultado não poderá ser também e ao mesmo tempo coroa, pois são eventos *mutuamente excludentes*.

A união de eventos elementares forma o espaço amostral, pois são eventos *coletivamente exaustivos*. Portanto, verifica-se que os eventos **A** e **B** pertencentes ao mesmo espaço amostral S:



São *mutuamente excludentes* se sua interseção for vazia: $A \cap B = \varnothing$, pois os dois eventos não têm nenhum elemento em comum. Ex: Os eventos Ca e Co resultantes do lançamento de uma moeda.

São *coletivamente exaustivos* se a união dos eventos formarem o espaço amostral: $A \cup B = S$, onde cada evento pode ter elementos repetidos no outro evento.

Exercícios

1. Considerando o experimento: lançar uma moeda comum e anotar o resultado, lançando em seguida um dado comum e anotando o resultado como um par (moeda, dado), descrever:

a. o espaço amostral S;

b. o evento E_1 = sair cara na moeda;

c. o evento E_2 = sair par no dado;

d. o evento E_3 = sair cara na moeda e par no dado;

e. o evento E_4 = sair cara na moeda ou par no dado.

2. Fazendo duas retiradas consecutivas (com reposição) de bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?

3. Retirando, de uma só vez, duas bolas de uma urna que contém duas bolas brancas, três bolas verdes e quatro bolas amarelas, qual será o espaço amostral?

4. Considerando o experimento: fazer dois lançamentos consecutivos de um dado comum e honesto e anotar a face que ficará voltada para cima em cada lançamento, determinar:

a. o espaço amostral S;

b. o evento A = a soma dos resultados é 5;

c. o evento B = os resultados são iguais;

d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

5. Considerando o experimento: fazer um lançamento de dois dados comuns, honestos e indistinguíveis e anotar as faces que ficarão voltadas para cima, determinar:

a. o espaço amostral S;

b. o evento A = a soma dos resultados é 5;

c. o evento B = os resultados são iguais;

d. o evento C = o produto dos resultados é ímpar.

Probabilidade - É uma medida da possibilidade ou chance de ocorrência de um evento definido sobre um espaço amostral, que por sua vez está relacionado a algum experimento aleatório (não determinístico). No cálculo da probabilidade, o resultado será um número real compreendido entre 0 e 1, ou, o equivalente a dizer, entre 0 e 100%.

Definição Clássica de Probabilidade

Probabilidade - Representa a proporção do número de resultados favoráveis ao evento em relação ao número total de resultados possíveis do fenômeno, quando todos estes são considerados **equiprováveis**.

O termo **equiprovável** (ou igualmente provável) significa não preferir alguns resultados em detrimento de outros. Isto é fácil observar quando ocorre algum tipo de *simetria* no fenômeno estudado.

Exemplo

Considere o fenômeno *"rolar um dado equilibrado".* Observando o número que ocorre na face voltada para cima (ou superior), qual a probabilidade de ocorrer o evento número par?

Denominando a probabilidade de "ocorrer número par" por:

P (ocorrer número par) = p = 3/6.

Portanto, obtivemos três resultados favoráveis, sobre os seis resultados possíveis do espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. A probabilidade de ocorrer o evento número par é de 0,5 ou 50%.

OBSERVAÇÃO

Historicamente, é na idade média, com Galileu, que se registrou pela primeira vez a citação do termo **equiprovável**. Saiba que, mesmo em épocas remotas, a definição clássica foi considerada muito restrita, pois não respondia a questão: o que é probabilidade? Se observarmos o exemplo estudado, a definição clássica só realiza o cálculo de probabilidade de alguns eventos mais simples, utilizando, para isto, o método de contagem.

Exemplos

Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, construímos todos os números que podem ser representados usando dois deles (sem repetir). Escolhendo ao acaso (aleatoriamente) um dos números formados, qual a probabilidade de o número sorteado ser:

a. par

Temos 7 possibilidades de escolha do primeiro algarismo dos números e seis escolhas do segundo algarismo (os números não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 7 . 6 = 42 caso possíveis.
Para o número ser par deverá terminar (unidade) em 2, 4 ou 6. Devemos ter 3 possibilidades (2, 4, 6) associadas a 6 possibilidades (não podem ter algarismos repetidos). Assim, temos 3 . 6 = 18 casos favoráveis. Logo a probabilidade será:

$$P(par) = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

b. múltiplo de 5?

Casos possíveis = 42
Casos favoráveis = 1 . 6 = 6

$$P(múltiplo\ \ de\ 5) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$

Definição Frequentista de Probabilidade

Probabilidade de um evento E é expressa por:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{número\ de\ ocorrências\ de\ E\ em\ n\ repetições\ independentes}{número\ n\ de\ repetições\ do\ experimento} \right)$$

Exemplo 1

Vamos supor um experimento em que jogamos um percevejo, usado para afixar painéis de aviso, sobre uma superfície lisa. Qual a probabilidade dele cair apontado para cima?

Primeiro é necessário entender que, neste caso, não podemos recorrer para propriedades de simetria, pois no caso do percevejo elas não existem.

Portanto, pense: **como calcular a probabilidade dele cair apontado para cima?**

A idéia é aproximar a probabilidade pela **estimativa** da probabilidade de ocorrência do evento, ou seja, jogar o percevejo vezes, mantendo-se as mesmas condições (mesmo percevejo, mesmo indivíduo – "jogador", mesma superfície, etc.)

Para resolver este problema, devemos utilizar a expressão a seguir:

$$P(cair\ apontando\ para\ cima) = p = \frac{número\ de\ vezes\ que\ cair\ apontando\ para\ cima}{número\ total\ de\ observações\ (n)}$$

OBSERVAÇÃO

Neste exemplo, poderíamos também considerar uma moeda **não equilibrada** (isto é cara e coroa não são igualmente prováveis), ou um dado **não honesto** (isto é, os resultados 1, 2, 3, 4, 5 e 6 não são igualmente prováveis).

Fique atento para distinguir que a escolha da definição a ser aplicada depende muito da natureza do fenômeno. É possível observar que a **definição frequentista** se baseia na estabilidade da frequência relativa. No exemplo visto, o percevejo deverá ser lançado diversas vezes e a freqüência com que sua ponta cai para cima atingirá, depois de várias repetições, um comportamento que tende a estabilidade. Se lançado vezes, o percevejo cair com a ponta para cima em aproximadamente 70% das tentativas, este é o **comportamento esperado** do evento. Portanto, sua probabilidade **tende** a ser de 0,7 ou 70%.

Exemplo 2 de Definição Frequentista

Qual a chance de se retirar, de um baralho comum, uma carta de ouros?

E: retirar uma carta de ouros de um baralho comum
n: número de resultados favoráveis à ocorrência do evento
T: número total de resultados igualmente possíveis do espaço amostral

Portanto:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(carta\ de\ ouro) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ ou\ 25\%$$

Se existem 13 cartas de ouros em 52 cartas totais, temos 25% de chance de retirar uma carta de ouros de um baralho comum.

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(valete), Q(dama) e K(rei)

13 copas: ♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

13 ouros: ♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

13 paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Exemplos

Definição Subjetiva de Probabilidade

É a atribuição de probabilidades baseadas em experiências passadas, opiniões, enfim, no poder de análise pessoal de uma situação específica. Por exemplo, suponhamos que um químico manipule um novo perfume para mulheres e atribua uma probabilidade de aceitação deste perfume junto às mulheres bastante diferente daquela atribuída pelo dono do estabelecimento.

A **probabilidade subjetiva** é especialmente útil na tomada de decisões, quando estas não puderem ser determinadas empiricamente.

EXEMPLOS

- Qual a probabilidade de você fechar sua nota na próxima avaliação presencial?
- Qual a probabilidade de chover no final de semana?
- Qual a probabilidade do enfermo se recuperar completamente?

OBSERVAÇÃO

Para que a teoria construída sobre esta ou outras questões subjetivas (pessoais) tenha consistência (coerência) algumas regras gerais e de comportamentos racionais são estabelecidas. Estas regras são baseadas em alguns **axiomas**, ou seja, teorias que vamos apresentar ainda neste capítulo. Mas, antes de conhecer estes axiomas, vamos conhecer algumas terminologias e idéias básicas que os compõem.

Axiomas da Probabilidade

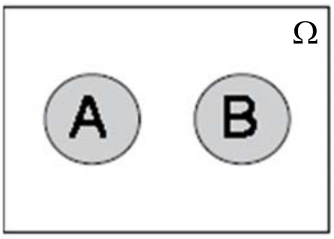
Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2: $P(\Omega) = 1$

Axioma 3: Se E_1 e E_2 são eventos **mutuamente exclusivos**, então

$$P(E_1 \text{ ou } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

É sabido, portanto, que dois eventos e são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** quando <u>não</u> têm elementos em comum, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.



Dois eventos são mutuamente exclusivos quando NÃO têm intersecção:

$A \cap B = \varnothing$, $n(A \cap B) = 0 \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0}$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Teoremas da Probabilidade

I. O **evento impossível** possui probabilidade zero, isto é, $P(\varnothing) = 0$.

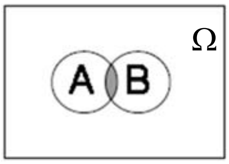
II. Se E^c representa o **evento complementar** de E, então $P(E^c) = 1 - P(E)$.

III. Para quaisquer eventos, supor A e B, temos que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

IV. Se $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

V. Se associados a um espaço amostral estiver dois eventos quaisquer, , temos que:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



A área hachurada da figura ao lado é A∩B, mas observe que A∩B faz parte de A e também de B.
n(AUB) = n(A) + n(B) – n(A∩B)
Daí, dividindo toda a igualdade por n(E), vem:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Caso os eventos A e B sejam **mutuamente exclusivos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos do **teorema V:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo 1

Lancei um dado.
Seja “A” o evento de se obter 1 ou 3, e “B” o evento de se obter 3 ou 4, calcule $P(A \cup B)$

Solução

$P(A) = 2/6$ e $P(B) = 2/6$ e $P(A \cap B) = 1/6$

Os eventos “A” e “B” têm o elemento “3” em comum, ou seja, ele pertence aos dois ao mesmo tempo, assim os dois eventos não são mutuamente exclusivos.

Logo: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = (2/6) + (2/6) - (1/6) = 3/6$

E se os eventos fossem A = {1,3} e B= {4,5} ?

Exemplo 2

Extrai-se uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um rei <u>ou</u> uma carta de ouro?

Solução

Consideremos que “A” seja representado pela possibilidade de sair um rei e “B” a possibilidade de sair uma carta de ouro. Observe que “A” e “B” têm um único elemento em comum: o rei de ouros.

O baralho tem 52 cartas e 4 naipes: paus, espadas, copas e ouros. Sabe-se que cada naipe tem 13 cartas, que vão do “A” (ás) ao “K” (rei), sem considerar os coringas.

Então: P(A) = 4/52   P(B) = 13/52   P(A∩B) = 1/52

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{número de reis do baralho}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{4}{52}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{\text{número de cartas de ouro}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)} = \frac{\text{número de cartas de ouro e rei ao mesmo tempo}}{\text{número total de cartas do baralho}} = \frac{1}{52}$$

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(valete), Q(dama) e K(rei)

13 copas: ♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 ouros: ♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Logo: P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = (4/52) + (13/52) – (1/52) = 16/52

Exemplo 3

Um baralho tem 12 cartas, das quais 4 são ases. Retiram-se 3 cartas ao acaso. Qual a probabilidade de haver pelo menos um ás entre as cartas retiradas?

Solução

12 cartas, das quais 4 são ases.
Espaço amostral = U
n(U) = 12 . 11 . 10 = 1.320
Evento A = sair pelo menos um ás   Evento A_{com} = não sair ás.

$n(A_{com}) = \underbrace{8}_{\text{não Ás}} \; . \; \underbrace{7}_{\text{não Ás}} \; . \; \underbrace{6}_{\text{não Ás}} = 336 \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{336}{1.320} = \frac{14}{55} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55}$

Num baralho padrão temos 52 cartas, sendo 13 de cada naipe:

As cartas são: A(ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J(valete), Q(dama) e K(rei)

13 copas: ♥ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 ouros: ♦ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 paus: ♣ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A
13 espadas: ♠ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Atividade 02

Sabe-se que a Indústria SACO DE PLÁSTICO, fabricante de sacos em tecido de polipropileno (*Big Bags*), apresenta um processo de inspeção para controle de qualidade em três etapas, I, II e III. A probabilidade de um produto passar em qualquer dessas etapas de inspeção sem ser detectado é de aproximadamente 82%. Com base nestas informações, encontre a probabilidade de um produto passar pelas três etapas de inspeção sem ser detectado. Apresente uma conclusão para o resultado obtido.

Solução

A situação apresentada na atividade 2 sugere a aplicação da definição de **eventos independentes**, entre as três etapas de inspeção, em que podemos escrever:

$P(I \cap II \cap III) = P(I)\ P(II)\ P(III)$

$P(I \cap II \cap III) = 0,82^3 \cong 55,14\%$

Tchau

Até Terça-Feira que vem!!!!