PROBABILIDADES

Variáveis Aleatórias
e
Distribuições de Probabilidade

BERTOLO

Função de Probabilidades

Vamos considerar um experimento E que consiste no lançamento de um dado honesto.
Seja X a variável aleatória representando os pontos obtidos na face voltada para cima (elementos do espaço amostral).
Seja P(X) a **função** que associa a cada valor (evento) de X a sua probabilidade de ocorrência. Então, temos:

Tabela 1: Valores obtidos, na face voltada para cima, no lançamento de um dado honesto.

	1	2	3	4	5	6	Total
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Fonte: dados simulados

$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Notação: $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

A esta função que satisfaz o intervalo: $0 \leq p_i \leq 1$, dá-se o nome de **função de probabilidade**.

O conjunto de pares ordenados: $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \ldots, n\}$ é chamado de **Distribuição de Probabilidades**

Exemplo

Consideremos a distribuição de frequências relativa ao número de acidentes diários em um estacionamento.

Tabela

Número de Acidentes	Frequências	Probabilidades
0	22	$p = \frac{22}{30} = 0{,}73$
1	5	$p = \frac{5}{30} = 0{,}17$
2	2	$p = \frac{2}{30} = 0{,}07$
3	1	$p = \frac{1}{30} = 0{,}03$
	$\Sigma = 30$	$\Sigma = 1{,}00$

Esta **tabela** é denominada **DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE**.

Exemplo 2

Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 4 bolas vermelhas e 3 pretas. Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas retiradas no experimento". Quais os valores assumidos por "X" ? Qual a Função probabilidade P(x)? Qual a distribuição de probabilidades?

Solução:

S = {vv, vp, pv, pp} ....Espaço Amostral S ou Ω

Então a VARIÀVEL ALEATÓRIA x = {2, 1, 1, 0}, ou seja, as duas bolas podem ser:

Duas vermelhas;

Uma vermelha e outra preta;

Uma preta e outra vermelha;

Duas pretas, ou seja, x = 0, 1, 2

x	0	1	2
P(x)	1/4	2/4	1/4

Exemplo 3

Vamos jogar 3 moedas honestas e observar o resultado.

a. Construa o espaço amostral.
b. Construa a variável aleatória x indicando o número de caras (Ca)
c. Construa a distribuição de probabilidades;
d. Calcule as probabilidades acumuladas.

Solução:

a.
S:{(CaCaCa) (CaCaCo) (CaCoCa) (CoCaCa) (CoCoCo) (CoCoCa) (CoCaCo) (CaCoCo)}
n= 8 elementos

b. Seja **X** a *variável aleatória* $\Rightarrow$ X = número de caras (Ca)

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$

c.

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

d. 1/8 4/8 7/8 8/8

ATIVIDADE 01

Certo experimento consiste no lançamento de dois dados e na observação da soma dos pontos das faces superiores. Considere D_1: dado 1, D_2: dado 2 e $\mathbb{Z}$ a soma dos pontos das faces superiores. Determine o *espaço amostral* do experimento e a *função de probabilidade* de $\mathbb{Z}$.

Solução

D_1: dado 1 e D_2: dado 2

$\mathbb{Z}$: soma dos pontos das faces superiores

E_1: lançar dois dados e observar a soma das faces superiores

TABELA 1 – Soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados honestos

D1 \ D2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Espaço amostral: Ω = {(1;1);(1;2);(1;3);...; (6;6)}

Variável aleatória Z = {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}

Tabela 2: Função de probabilidade obtida, no lançamento de dois dados honestos.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Fonte: dados simulados

Variáveis Aleatórias

Seja o experimento E que consite em tomar uma semente ao acaso, de girassol, por exemplo, e observar se ela germina (G) ou não germina ($\bar{G}$).
O espaço amostral Ω será: Ω = {G, $\bar{G}$}.
Construindo a variável aleatória X, referida daqui prá frente como v.a., assim:

Generalizando:
Seja **E** um experimento aleatório qualquer e, Ω o seu espaço amostral denotado por Ω = {a_1, a_2, ..., a_n}. Qualquer função X que associa os valores de Ω com números reais é chamada de **variável aleatória.**

Variáveis Aleatórias Discreta

Seja E um experimento aleatório qualquer e, Ω o seu espaço amostral denotado por Ω = {a_1, a_2, ..., a_n}. Qualquer função X que associa os valores de Ω em números reais é chamada de **variável aleatória discreta**

Exemplo:
Seja um experimento **E** relativo ao "lançamento simultâneo de duas moedas. Neste caso, as possibilidades obtidas, podem ser representadas pelo seguinte espaço amostral:
Ω = {(Ca,Ca),(Ca,Co),),(Co,Ca), (Co,Co)}

Seja **X** a v.a. definida como a quantidade (ou número) de **caras** que aparecem.
Então, a cada ponto amostral podemos associar um número de acordo com a tabela 1:

Tabela 1

Ponto Amostral	X
(Ca,Ca)	2
(Ca,Co)	1
(Co,Ca)	1
(Co,Co)	0

Variável Aleatória

Tabela 2

Ponto Amostral	X	P(X)
(Ca,Ca)	2	1/2 x1/2 = 1/4
(Ca,Co)	1	1/2 x1/2 = 1/4
(Co,Ca)	1	1/2 x1/2 = 1/4
(Co,Co)	0	1/2 x1/2 = 1/4

Cálculo das Probabilidades

Tabela 3

X	P(X)
2	1/4
1	2/4
0	1/4
	Σ=1

Distribuição de Probabilidades

Exemplo 4

Calcular a função probabilidade **discreta** dos seguintes dados:

NOTAS (X_i)	50	60	70	90	100
FREQUÊNCIA (f_i)	1	2	2	1	4

SOLUÇÃO

Notas (x_i)	50	60	70	90	100
Freqüência Relativa $\left(\frac{fi}{n}\right)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$

ATIVIDADE 02

A assistente de um Centro de Saúde, situado na região de Belo Horizonte, baseada nos dados do último censo, verifica que, para as famílias dessa região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos. Suponha que uma família será escolhida, aleatoriamente, nessa região, e o número de filhos averiguado. Apresente a função de probabilidade que melhor represente o comportamento da variável aleatória número de filhos.

Solução

X: número de filhos (variável aleatória) dentre 0, 1, 2, 3, 4, 5

A **função de probabilidade** dessa variável X segue as informações disponíveis que:

P(X = 0) = 0,20 P(X = 1) = 0,30 e P(X = 2) = 0,35

P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = p

Pela definição de função de probabilidades, temos que:
P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 1
0,20 + 0,30 + 0,35 + p + p + p = 1
p = 0,05.
Logo, a **função de probabilidade** para X é expressa por:

Tabela 3 Função de probabilidade para X

X	0	1	2	3	4	5	Total
p_i	0,20	0,30	0,35	0,05	0,05	0,05	1,0

Fonte: dados simulados

Ao definir a distribuição de probabilidades, estabelecemos uma correspondência unívoca entre a v.a. X e os valores de P. Isto define uma função denominada função de probabilidade, representada por:
$f(x) = P(X=x_i)$

Variáveis Aleatórias Contínua

Seja **E** um experimento aleatório que consiste em sortear uma semente.

Ω = tempo decorrido do plantio até a germinação. Estes resultados têm uma escala contínua de valores.

A variável aleatória **T** associada aos resultados do espaço amostral Ω é, neste caso, chamada de **variável aleatória contínua.**

Estatística versus Parâmetros

Estatística representa uma informação ou característica da **amostra** (*n*).

Parâmetro representa uma medida utilizada para descrever uma característica da **população** (*N*).

Quadro 1: Notações de estatísticas e parâmetros

Notações		
Estatísticas (Amostra)	**Parâmetros (População)**	**Denominações**
n	N	Número de elementos
$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} n$	$\mu_X = E(X)$	Média
$S_X{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}$	$\sigma_X{}^2 = Var(X)$	Variância
$S_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$	$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$	Desvio Padrão

Fonte: elaboração da própria autora.

Parâmetros das Variáveis Discretas

Destacamos, a seguir, algumas destas características para a **variável aleatória discreta**:

- **Média de uma variável aleatória discreta (μ)** - a média de uma v. a. discreta (μ) é calculada pela expressão:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i), \qquad i = 1,2,3,\ldots,n$$

OBS: A média de X é usualmente expressa por E(X), denominada esperança matemática da variável aleatória X ou valor esperado da variável aleatória X.

- **Variância de uma variável aleatória discreta (σ²)** - a mesma analogia existe entre a variância e desvio-padrão de uma distribuição de freqüência e, a variância e desvio-padrão de uma variável aleatória X.

A variância, é representada pela expressão:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . p(x_i) = \sigma^2$$

Exemplo

Imagine a seguinte distribuição da v.a. discreta X, referente ao Nº de cirurgias diárias numa pequena clínica:

X	3	4	5	6	7	8
P(X)	0,10	0,20	0,30	0,20	0,15	0,05

Calcule a média e a variância de X.

Solução

Para calcularmos a **média** diária de cirurgias efetuadas, basta calcular , ou seja, o somatório do produto de cada valor da variável pela sua probabilidade correspondente:

E (X) = 3 . 0,10 + 4 . 0,20 + 5 . 0,30 + 6. 0,20 + 7. 0,15 + 8 . 0,05

E (X) = 0,30 + 0,80 + 1, 50 + 1, 20 + 1,05 + 0,40

E (X) = 5,25

Portanto, diariamente são efetuadas, em média, 5,25 cirurgias.

A **variância**, Var(X), é calculada pela expressão:

Vamos calcular a **variância** do número de cirurgias.
Var(X) = (3 – 5,25)² . 0,10 + (4 – 5,25)² . 0,20 + (5 – 5,25)² . 0,30 + (6 – 5,25) ² . 0,20 + (7 – 5,25)² . 0,15 + (8 – 5,25)² . 0,05
Var(X) = 5,0625 . 0,10 + 1,5625 . 0,20 + 0,0625 . 0,30 + 0,5625 . 0,20 + 3,0625 . 0,15 + 7,5625 . 0,05
Var(X) = 0,50625 + 0,3125 + 0,0188 + 0,1125 + 0,4594 + 0,3781
Var(X) = 1,7876.
Portanto, o **desvio padrão** de
σ (X) = 1, 3370 ≅ 1,34.
O número médio de cirurgias realizadas nesta clínica é de 5,25, com desvio padrão de 1,34.

Exemplo 5

A variável aleatória X apresentada a seguinte função densidade de probabilidade:

X	0	1	2	3	4
f(x)=P(X=x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Com base nessa distribuição determine:

a) a função distribuição acumulada
b) P(X=1)
c) a esperança
d) a variância de X.
e) P[X<E(X)]

Solução

a)

X	0	1	2	3	4
F(x)	1/16	5/16	11/16	15/16	1

b) 4/16
c) E(X)=2
d) Var X= $E(X^2)$- $(E(X))^2$= 5-2^2= 1
f) e) P[X<2]= 1/16 + 4/16= 5/16