PROBABILIDADES

Distribuições de Probabilidade
Distribuição Poisson

BERTOLO

PRELIMINARES

Quando aplicamos a Estatística na resolução de situações-problema, verificamos que muitas delas apresentam as mesmas características; o que nos permite estabelecer um modelo estatístico teórico para a determinação da resolução destas situações-problema.

Este modelo estatístico teórico, também conhecido por **distribuição de probabilidades**, apresenta algumas características principais, entre estas:

I. Os possíveis valores que a variável aleatória pode assumir;

II. A função de probabilidade associada à variável aleatória ;

III. A média (ou valor esperado) da variável aleatória ;

IV. A variância e o desvio-padrão da variável aleatória .

Neste contexto, vamos estudar algumas das principais distribuições de probabilidades discretas entre elas, a **distribuição binomial** e a **distribuição de Poisson**. E, entre as distribuições de probabilidades contínuas, a **distribuição normal**.

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X admite distribuição de Poisson sendo expressa por:

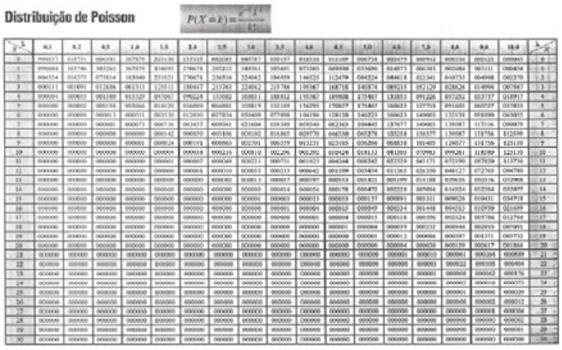
$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

Em que,

λ: denota o parâmetro de interesse, sendo usualmente tratado como a *taxa de ocorrência*.

μ: denota a média $(\mu=E(X)=\lambda)$.

k: denota o número de ocorrências.


Distribuição de Poisson

Exemplos

Em uma central telefônica, o número de telefonemas, em média, podem chegar a 2 chamadas por minuto ou 2,5 chamadas por minuto, ou 3 ou 3,5, e assim por diante. Percebemos então, que a média não precisa ser composta apenas por valores inteiros. Entretanto, em um minuto, por exemplo, podem chegar 2, 3, 4, 5 chamadas; sempre números inteiros.

Em um minuto, numa central telefônica, chegam 2 chamadas. Em outro minuto, chegam 3. Determine a média de chamadas.

$$Média=\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{2+3}{2}=2,5$$

Atenção! A média da distribuição de Poisson pode assumir qualquer valor, mas o número de ocorrências é sempre um número inteiro.

Outros exemplos da distribuição de Poisson:

1. O número de unidades de sacos de cimento consumidos em uma construção civil é de 5 unidades, em média, por dia.
2. O número de unidades de DVDs vendidos em uma loja é 6 unidades, em média, por dia.
3. O número de colisões de veículos em certo cruzamento é de 3 colisões, em média, por semana.
4. O número de pacientes atendidos por um médico é de 4 pacientes, em média, por hora.

Propriedade Importante da Poisson

Uma propriedade importante importante da distribuição de Poisson é a aditividade das médias, ou seja, se em um minuto chegam 2 chamadas em uma central telefônica, em média, em 2 minutos, a média será de 4 chamadas. Assim:

1,0 min $x = \mu = 2$ chamadas
2,0 min $x = \mu = 4$ chamadas
0,5 min $x = \mu = 1$ chamada.

Exemplo 1 de Poisson

1. O número de clientes atendidos pelo caixa de um banco é de 4, em média, por hora. Qual a probabilidade de se atender:
   a. exatamente 4 clientes em uma hora;
   b. no máximo, 2 clientes em uma hora;
   c. pelo menos, 2 clientes em uma hora.

Solução

Para resolver estas situações sem ter que efetuar as contas, é possível obter os resultados consultando a tabela de Poisson. Basta procurar a média desejada (μ, na tabela) e, em seguida, ler o valor de k. A probabilidade estará na intersecção de coluna de μ com a linha de k.

a) $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!} = \frac{e^{-4}4^4}{4!} = 0,1954$

b) $P(X \le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{4^0}{e^4.0!} + \frac{4^1}{e^4.1!} + \frac{4^2}{e^4.2!} = 0,0183 + 0,0733 + 0,1465 = 0,2381$

c) Pelo menos 2, significa atender 2 ou mais clientes. Neste caso, são várias as possibilidades. Então, faremos o cálculo utilizando a propriedade complementar.

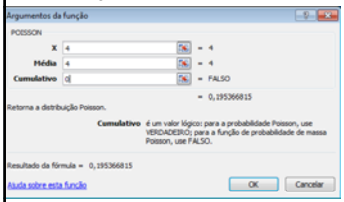
Nesta situação, somente não poderá atender 0 ou 1 cliente (não se esqueça do zero).

Portanto: $P(X \ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,0183 - 0,0733 = 0,9084$

Exemplo 1 de Poisson

1. O número de clientes atendidos pelo caixa de um banco é de 4, em média, por hora. Qual a probabilidade de se atender:
   a. exatamente 4 clientes em uma hora;
   b. no máximo, 2 clientes em uma hora;
   c. pelo menos, 2 clientes em uma hora.

Solução



Exemplo 2 de Poisson

1. Um taxi atende, em média, dois clientes por hora. Qual a probabilidade de atender:
   a. 1 ou 2 clientes, em 1 hora;
   b. 4 ou 5 clientes, em 2 horas;
   c. nenhum cliente em meia hora.

Solução

a. em 1 hora $\mu = \lambda = 2$.

a) $P(X=1)+P(X=2) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} + \frac{e^{-2}(2)^2}{2!} = 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}5414$

b) 1 hora 2 clientes
2 horas $x = \lambda = \mu = 4$

$P(X=4) + P(X=5) = 0{,}1954 + 0{,}1563 = 0{,}3517$

c) 1 hora 2 clientes
0,5 hora $x = \lambda = \mu = 1$

$P(X=0) = \frac{e^{-1}(1)^0}{0!} = 0{,}3679$

Exemplo 2 de Poisson

1. Um taxi atende, em média, dois clientes por hora. Qual a probabilidade de atender:
   a. 1 ou 2 clientes, em 1 hora;
   b. 4 ou 5 clientes, em 2 horas;
   c. nenhum cliente em meia hora.

Solução

ATIVIDADE 04

Numa colheita mecanizada de cana-de-açúcar existem várias colhedoras de certo tipo. Depois de muitas observações chegou-se à conclusão de que o número de colhedoras que se avariam em cada mês é uma variável aleatória T com distribuição de Poisson de média $\lambda = 3$, $T \sim P_0(3)$. Qual a probabilidade para que durante um mês se avariem 7 ou mais colhedoras?

Solução

Como fornecido $T \sim Po(\lambda)$, $\lambda = 3$.

Deseja-se saber qual a probabilidade para que durante um mês se avariem sete ou mais colhedoras.

$$P(T = k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

T : número de colhedoras que se avariam em cada mês.

λ : média

k : número de ocorrências

$$P(T \geq k) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^k}{k!} \Rightarrow P(T \geq 7) = \sum_{k=7}^{\infty} \frac{e^{-3}(3)^k}{k!} \rightarrow \textbf{Tabela de Poisson}$$

Para obter o resultado consultando a **Tabela de Poisson** (ao final deste capítulo), basta procurar a média desejada, $\lambda = 3$ (λ, equivale a μ na Tabela de Poisson que apresentamos), e, em seguida, ler o valor correspondente de k. A probabilidade é obtida pela intersecção da coluna de μ com a linha de k.

Atenção! Observe que, neste caso, como $T \geq 7$ vamos somar todas as intersecções da coluna de μ com a linha de k a partir de $k = 7$ até o final da coluna de $\mu = 3$. E, na **Tabela de Poisson** para $\mu = 3$ o último valor tabelado para k corresponde a 13 (valor $0,000$).

$$P(T \geq 7) = 0,0216 + 0,0081 + 0,0027 + 0,0008 + 0,0002 + 0,0001$$

$$P(T \geq 7) = 0,0335$$

6	0,0504
7	0,0216
8	0,0081
9	0,0027
10	0,0008
11	0,0002
12	0,0001
13	0,000
14	

Concluímos que durante um mês a probabilidade que se avariem sete ou mais colhedoras de cana-de-açúcar é de 3,35%.

Exercício 1

a. Qual é a diferença entre as distribuições de Poisson e Binomial?

b. Dê alguns exemplos de quando podemos aplicar a distribuição de Poisson.

c. Dê a fórmula da distribuição de Poisson e o significado dos vários símbolos.

Solução

a. Enquanto a distribuição binomial pode ser usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos em n tentativas, a distribuição de Poisson é usada para encontrar a probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo[1]. As outras condições exigidas para se aplicar a distribuição Binomial são também exigidas para se aplicar a distribuição de Poisson; isto é, (1) deve existir somente dois resultados mutuamente exclusivos, (2) os eventos devem ser independentes, e (3) o número médio de sucessos por unidade de intervalo deve permanecer constante.

b. A distribuição de Poisson é frequentemente usada em pesquisa operacional na solução de problemas administrativos. Alguns exemplos são o número de chamadas telefônicas para a polícia por hora, o número de clientes chegando a uma bomba de gasolina por hora, e o número de acidentes de tráfego num cruzamento por semana.

c. A probabilidade de um número designado de sucessos por unidade de intervalo, P(X), pode ser encontrada por:

$$P(X) = \frac{\lambda^X e^{-\lambda}}{X!}$$

onde X: número designado de sucessos
λ: o número médio de sucessos num intervalo específico
e: A base do logaritmo natural, ou 2,71828

Dado o valor de λ, podemos encontrar $e^{-\lambda}$, substituindo na fórmula, e encontrar P(X). Note que λ é a média e a variância da distribuição de Poisson.

Exercício 2

2. Um departamento de polícia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada aleatoriamente?

Solução

X = número designado de sucessos = 2
λ = o número médio de sucessos num intervalo específico (uma hora) = 5

$$P(2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0{,}08422434 \quad \text{ou} \quad 8{,}42\%$$

Desafio I

1. Na pintura de paredes de uma sala aparecem defeitos na proporção de 1 para cada m² de pintura. Determine a probabilidade de:
a. não haver defeitos na pintura de uma parede de 2 m x 2,5 m;
b. encontrarmos, no máximo, dois defeitos na mesma parede.

Respostas:

1 m² de parede tem, em média, 1 defeito por pintura. Uma parede de 2m x 2,5 m = 5 m² têm, em média, 5 defeitos. Portanto, μ = 5.

a. $P(X=0) = \frac{5^0}{e^5 0!} = 0{,}0067$ ou 0,67%

b. $P(0) + P(1) + P(2) = \frac{5^0}{e^5 0!} + \frac{5^1}{e^5 1!} + \frac{5^2}{e^5 2!} = 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842 = 0{,}1246$ ou 12,46%.

2. Em um hospital, um médico atende, em média, 3 pacientes por hora. Qual a probabilidade dele atender:
a. 3 ou 4 pacientes em 1 hora;
b. no máximo, 2 pacientes em 1 hora;
c. pelo menos, 4 pacientes em 1 hora.

Respostas:

Os cálculos das probabilidades são lidos na tabela da Distribuição de Poisson.

μ = 3

a. $P(3) + P(4) = \frac{3^3}{e^3.3!} + \frac{3^4}{e^3.4!} = 0{,}2240 + 0{,}1680 = 0{,}3920$ ou 39,20%.

b. $P(0) + P(1) + P(2) = \frac{3^0}{e^3.0!} + \frac{3^1}{e^3.1!} + \frac{3^2}{e^3.2!} =$
$0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 = 0{,}4232$ ou 42,32% .

c. $P(x \geq 4) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) =$
$1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 - 0{,}2240 - 0{,}2240 = 1 - 0{,}6472 = 0{,}3528$ ou 35,28% .

Tarefa para casa!!!!

Numa cidade de 25.000 habitantes, ocorrem em média 2 suicídios, por ano. Qual a probabilidade de:
a) ocorrerem pelo menos 1 suicídio, em 1 ano?;
b) não haver nehum suicídio, em 1 ano.

Respostas: μ = λ = 1

a) $P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{1^0}{e^1.0!} = 1 - 0{,}3679 = 0{,}6321$ ou 63,21%

b) $P(x=0) = \frac{1^0}{e^1.0!} = 0{,}3679$ ou 36,79% .

2. Caminhões chegam a um depósito à razão de 3 caminhões/hora. Determine a probabilidade de chegarem dois ou mais caminhões:
a. num período de 30 minutos;
b. no período de 1 hora.

Respostas:

a) Como são 3 caminhões / hora, em ½ hora teremos 1,5 caminhões, em média.

1 hora --------- 3 caminhões
½ hora --------- x = 1,5 = μ. Então, trabalharemos com média = 1,5.

$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 - \frac{1{,}5^0}{e^{1{,}5}.0!} - \frac{1{,}5^1}{e^{1{,}5}.1!} = 1 - 0{,}2231 - 0{,}3341 = 0{,}4422$.

b) Em 1 hora, a média será μ = 3.

$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 - \frac{3^0}{e^3.0!} - \frac{3^1}{e^3.1!} = 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 = 0{,}8008$.

Tarefa para casa cont....

3. Numa central telefônica chegam, em média, 4 chamadas por minuto. Qual a probabilidade de ocorrer em um minuto:
a) exatamente 4 chamadas;
b) no máximo, 1 chamada.

Distribuição de Poisson com μ = 4.

a) $P(x=4)=\frac{4^4}{e^4 4!}=0,1954$.

valor: 4 pontos.

b) $P(0)+P(1)=\frac{4^0}{e^4.0!}+\frac{4^1}{e^4.1!}=0,0183+0,0733=0,0916$ ou 9,16% .

4. Uma empresa recebe, em média, um telegrama por dia útil. Qual a probabilidade de que, em uma semana com 5 dias úteis, essa empresa receba:
a) exatamente 5 telegramas?
b) pelo menos 1 telegrama?

Distribuição de Poisson com μ = 5.

a) $P(x=5)=\frac{5^5}{e^5 5!}=0,1755$.

b) $P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-\frac{5^0}{e^5.0!}=1-0,0067=0,9933$.

Tarefa para casa cont....

5. O tempo de atendimento de um cliente num banco é uma variável normalmente distribuída, com média de 15 min e desvio padrão de 3 min. Qual a probabilidade de um cliente ser atendido em:
a) mais de 15 min;
b) entre 15 e 18 min;
c) entre 12 e 15 min;
d) entre 12 e 18 min.

Distribuição Normal com μ = 15 e σ = 3

a) $P(x>15)=P(z>0)=0,5$ ou 50%.

b) $P(15<x<18)=P\left(\frac{15-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(0<z<1)=0,3413$

c) $P(12<x<15)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{15-15}{3}\right)=P(-1<z<0)=P(0<z<1)=0,3413$.

d) $P(12<x<18)=P\left(\frac{12-15}{3}<z<\frac{18-15}{3}\right)=P(-1<z<1)=2.P(0<z<1)=2.0,3413=0,6826$.

6. O número de *e-mails* recebidos por um estudante, diariamente, tem média igual a cinco. Qual a probabilidade dele receber, diariamente:
a) exatamente cinco;
b) no máximo, 2;
c) pelo menos, 3 emails.

Distribuição de Poisson com μ = 5

a) $P(x=5)=\frac{5^5}{e^5 5!}=0,1755$.

b) $P(0)+P(1)+P(2)=\frac{5^0}{e^3.0!}+\frac{5^1}{e^3.1!}+\frac{5^2}{e^3.2!}=0,0067+0,0337+0,0842=0,1246$.

c) $1-P(0)-P(1)-P(2)=1-\frac{5^0}{e^3.0!}-\frac{5^1}{e^3.1!}-\frac{5^2}{e^3.2!}=$
$1-0,0067-0,0337-0,0842=1-0,1246=0,8754$.

Tarefa para casa cont....

7. Um comerciante de carros usados vende, em média, 2,5 automóveis de um certo modelo, diariamente. Qual a probabilidade de vender, em um dia:

a) 2 ou 3 carros;

b) 3 ou 4 carros desse modelo.

Distribuição de Poisson com μ = 2,5

a) $P(2)+P(3)=\frac{2{,}5^2}{e^{2{,}5}.2!}+\frac{2{,}5^3}{e^{2{,}5}.3!}=0{,}2565+0{,}2138=0{,}4703$ ou 47,03%.

b) $P(3)+P(4)=\frac{2{,}5^3}{e^{2{,}5}.3!}+\frac{2{,}5^4}{e^{2{,}5}.4!}=0{,}2138+0{,}1336=0{,}3474$ ou 34,74%.

k	μ ou λ = 2	μ ou λ = 2,5
0	0,1353	0,0821
1	0,2707	0,2052
2	0,2707	0,2565
3	0,1804	0,2138
4	0,0902	0,1336
5	0,0361	0,0068
6	0,0120	0,0278
7	0,0034	0,0099
8	0,0009	0,0031
9	0,0002	0,0009
10	0,0000	0,0002

8.