PROBABILIDADES

Distribuições de Probabilidade
Distribuição Binomial

BERTOLO

PRELIMINARES

Quando aplicamos a Estatística na resolução de situações-problema, verificamos que muitas delas apresentam as mesmas características; o que nos permite estabelecer um modelo estatístico teórico para a determinação da resolução destas situações-problema.

Este modelo estatístico teórico, também conhecido por **distribuição de probabilidades**, apresenta algumas características principais, entre estas:

I. Os possíveis valores que a variável aleatória pode assumir;

II. A função de probabilidade associada à variável aleatória ;

III. A média (ou valor esperado) da variável aleatória ;

IV. A variância e o desvio-padrão da variável aleatória .

Neste contexto, vamos estudar algumas das principais distribuições de probabilidades discretas entre elas, a **distribuição binomial** e a **distribuição de Poisson**. E, entre as distribuições de probabilidades contínuas, a **distribuição normal**.

Distribuição Binomial

A **distribuição binomial** apresenta algumas características fáceis de ser interpretadas, isto é, supor um experimento E repetido *n* vezes independentemente; sendo que em cada repetição, dois eventos com probabilidades constantes podem ocorrer. Então seja *p* a probabilidade de **sucesso** e *q* a de **fracasso**.

Agora, imagine que estamos interessados na ocorrência de x sucessos e n-x fracassos, independente da ordem de ocorrência, desta forma temos que a variável aleatória X admite **distribuição binomial de probabilidades**.

A notação utilizada será X ≈ b(n,p) **(Lê-se a variável aleatória tem distribuição binomial com parâmetros *n* e *p*).**

Descrevendo, temos:

$$P(X=x)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$\mu(X)=np$ → média (ou valor esperado) da variável aleatória X.

$\sigma^2(X)=npq$ → variância da variável aleatória X.

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$ → desvio padrão da variável aleatória X.

Exemplo 1

Supor o lançamento de uma moeda honesta 10 vezes. Qual a probabilidade de se obter 5 vezes o resultado cara. Apresente a conclusão para resultado obtido.

Solução

Desejamos calcular a probabilidade de sair o resultado cara (k) 5 vezes.
Logo, n = 10 e p = 0,5 (probabilidade de se obter cara em cada lançamento de moeda).

Assim, $P(X=x)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}(0,5)^5(1-0,5)^{10-5}$$

$$P(X=5)=\frac{10!}{5!(10-5)!}(0,5)^5(1-0,5)^{10-5}$$

$$P(X=5)=\frac{10.9.8.7.6.5!}{5!5!}(0,5)^5(1-0,5)^5$$

$$P(X=5)=\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.4.1}(0,5)^5(1-0,5)^5=3.2.7.6.(0,03125).(0,03125)$$

$$P(X=5)=0,2461$$

Na tabela da distribuição binomial, disponível no livro p.126 a 128, temos que n = 10. Procuraremos p = 0,50 (a última coluna dos valores de p) e k = 5 (na coluna de k); na interseção da linha de k = 5 com a coluna de p = 0,50, encontramos o valor 0,2461.

Portanto, no lançamento de uma moeda honesta 10 vezes, a probabilidade de se obter 5 vezes o resultado cara é de aproximadamente 24%.

Tabela Binomial

Distribuição binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

5
6
10

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 10
0	90438	59874	34868	10737	Q5631	02825	00605	00098	10
1	09135	31513	38742	26844	18771	12106	04031	00977	09
2	00415	07463	19371	30199	28157	23347	12093	04394	08
3	00011	01048	05739	20133	25028	26683	21499	11719	07
4	00001	00096	01116	08808	14600	20012	25082	20508	06
5	00000	00006	00149	02642	05840	10292	20066	24608	05
6	00000	00000	00014	00551	01622	03676	11148	20508	04
7	00000	00000	00001	00079	00309	00900	04247	11719	03
8	00000	00000	00000	00007	00039	00144	01062	04394	02
9	00000	00000	00000	00000	00003	00014	00157	00977	01
10	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00010	00098	00
N = 10	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

No Excel

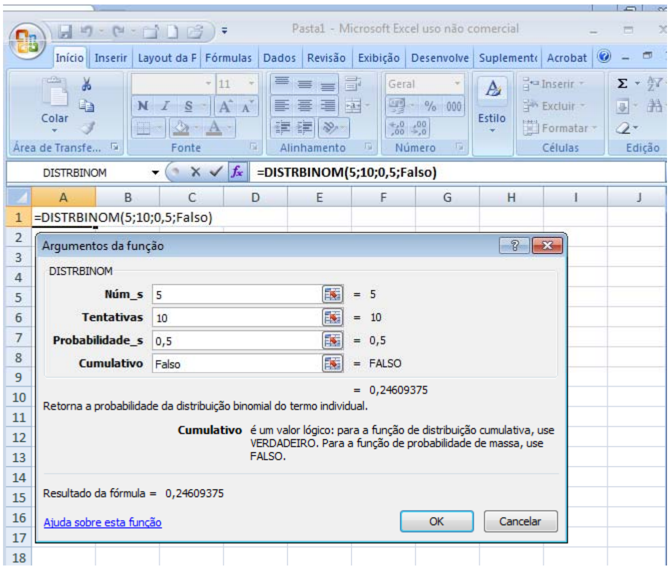


Tabela Binomial

$\eta = 20$									
0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000		20
1	0,2725	0,3774	0,2702	0,0577	0,0211	0,0068	0,0005	0,0000	19
2	0,0528	0,1887	0,2852	0,1369	0,0669	0,0278	0,0031	0,0002	18
3	0,0065	0,0596	0,1901	0,2054	0,1339	0,0716	0,0123	0,0011	17
4	0,0006	0,0133	0,0898	0,2182	0,1897	0,1304	0,0350	0,0046	16
5	0,0000	0,0022	0,0319	0,1746	0,2023	0,1789	0,0746	0,0148	15
6		0,0003	0,0089	0,1091	0,1686	0,1916	0,1244	0,0370	14
7		0,0000	0,0020	0,0545	0,1124	0,1643	0,1659	0,0739	13
8			0,0004	0,0222	0,0609	0,1144	0,1797	0,1201	12
9			0,0001	0,0074	0,0271	0,0654	0,1597	0,1602	11
10			0,0000	0,0020	0,0099	0,0308	0,1171	0,1762	10
11				0,0005	0,0030	0,0120	0,0710	0,1602	9
12				0,0001	0,0008	0,0039	0,0355	0,1201	8
13				0,0000	0,0002	0,0010	0,0146	0,0739	7
14					0,0000	0,0002	0,0048	0,0370	6
15						0,0000	0,0013	0,0148	5
16							0,0003	0,0046	4
17							0,0000	0,0011	3
18								0,0002	2
19								0,0000	1
20									0
	0,98	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	κ
				ρ					

Tabela Binomial

Distribuição binomial

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

5
6
10

n = 5

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 5
0	95099	77378	59049	32768	23730	16807	07776	03125	05
1	04803	20363	32805	40960	39551	36015	25920	15625	04
2	00097	02143	07290	20480	26367	30870	34560	31250	03
3	00001	00113	00810	05120	08789	13230	23040	31250	02
4	00000	00003	00045	00640	01465	02835	07680	15625	01
5	00000	00000	00001	00032	00098	00243	01024	03125	00
N = 5	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

n = 6

X \ P	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	N = 6
0	94148	73509	53144	26214	17798	11765	04666	01563	06
1	05706	23213	35429	39322	35596	30253	18662	09375	05
2	00144	03055	09842	24576	29663	32413	31104	23437	04
3	00002	00214	01458	08192	13184	18522	27648	31250	03
4	00000	00009	00122	01536	03296	05953	13824	23437	02
5	00000	00000	00005	00154	00439	01021	03686	09375	01
6	00000	00000	00000	00006	00024	00073	00410	01563	00
N = 6	0,99	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,60	0,50	P \ X

Exemplo 2

Supor o lançamento de uma moeda honesta 10 vezes. Qual a probabilidade de se obter no máximo 2 vezes o resultado cara. Apresente a conclusão para resultado obtido.

Solução

Desejamos calcular a probabilidade de sair o resultado cara (Ca) no máximo 2 vezes. Teoricamente, a moeda poderia dar o resultado cara até 10 vezes, iniciando por 0 caras (nenhuma vez). A variável x pode, então, variar de 0 até 10, mas queremos x=0,1,2.

Portanto,

p(X=0) + p(X=1) + p(X=2).

Na tabela da distribuição binomial, disponível no livro, temos que n = 10. Procuraremos os p´s correspondentes aos k´s e obtemos:

P(0) = 0,0010
P(1) = 0,0098
P(2) = 0,0439

P(0) + P(1) + P(3) = 0,0547 ou 5,47%.

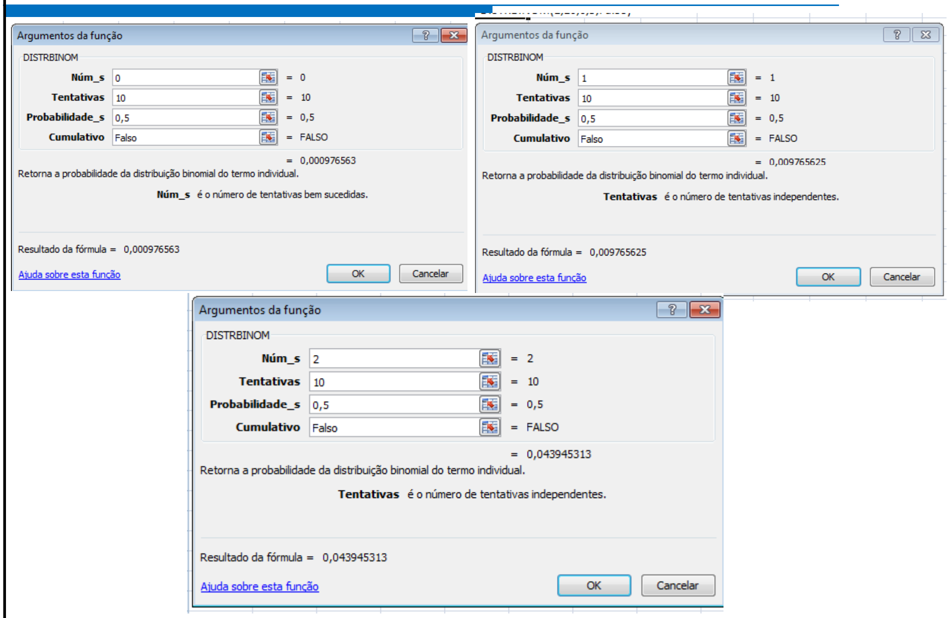
Portanto, no lançamento de uma moeda honesta 10 vezes, a probabilidade de se obter no máximo 2 vezes o resultado cara é de aproximadamente **5,5 %**.

E como você faria se quiséssemos pelo menos 3 vezes o resultado cara?

Dica:- $p(X \geq 3) = 1 - P(0) - P(1) - P(2)$

Resposta: 94,53%

No Excel



ATIVIDADE 03

Em um lote de peças, 5% são defeituosos. Calcule a probabilidade de, em 20 dessas peças, haver, exatamente, uma defeituosa.

Solução

Seja P(perfeita) = 0,95 e P(defeituosa) = 0,05 , logo 2 eventos com probabilidades constantes. Portanto, sendo k=1 o número de peças defeituosas temos,

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

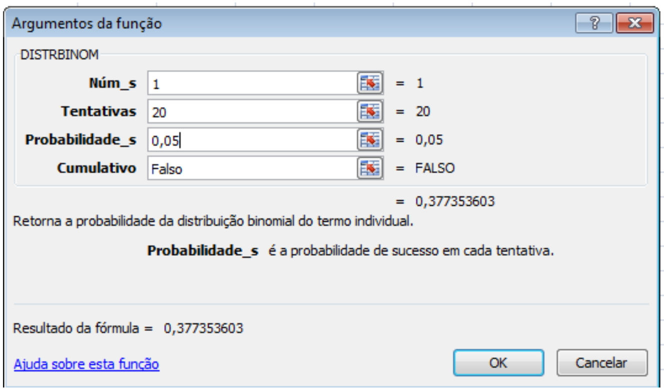
$$P(X = 1) = \binom{20}{1} (0,05)^1 (0,95)^{19} = 0,3774$$

		p	
	$\eta = 20$	0,02	0,05
k = X	0	0,6676	0,3585
	1	0,2725	0,3774
	2	0,0528	0,1887

Na **Tabela de distribuição binomial**, vamos fazer a leitura da intersecção destes valores, isto é, temos que para $n = 20$, $p = 0,05$ e para o valor de $k = 1$, a **intersecção da linha de** $k = 1$ **com a coluna em** $p = 0,05$**. Concluímos o resultado 0,3774.**

Portanto, em um lote de peças onde 5% são defeituosos, sorteadas 20 dessas peças, a probabilidade de haver, exatamente, uma defeituosa é em torno de 37,74%.

No Excel



Exercícios

Exercício 1:

a. Estabeleça as condições exigidas para se aplicar a distribuição binomial?
b. Qual é a probabilidade de 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?
c. Qual é a probabilidade de menos que 3 caras em 5 lançamentos de uma moeda honesta?

Solução

a) A distribuição binomial é usada para encontrar a probabilidade de X números de ocorrências ou sucessos de um evento, P(X), em **n** tentativas do mesmo experimento quando:
Existirem somente 2 resultados mutuamente exclusivos;
As **n** tentativas são independentes, e;
A probabilidade de ocorrência ou sucesso, p, permanece constante em cada tentativa.

b) $$P(X) = nC_x p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Cujo resultado é: 0,03125

c) $P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

Cujo resultado é:
$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 = 0{,}5$

Exercícios

Exercício 2:

a. Suponha que a probabilidade dos pais terem um filho(a) com cabelos loiros seja ¼. Se houverem 6 crianças na família, qual é a probabilidade de que metade delas terem cabelos loiros?

Solução

a. Aqui n = 6, X = 3, p = 1/4, e q = 3/4. Substituindo estes valores na fórmula binomial, obtemos

$$P(3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.3.2.1}\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{64}\right) = 20\left(\frac{27}{4096}\right) = \frac{540}{4096} \cong 0{,}13$$

b. Se a probabilidade de atingir um alvo num único disparo é 0,3, qual é a probabilidade de que em 4 disparos o alvo seja atingido no mínimo 3 vezes?

Solução

b) Aqui, em 4 disparos, no **mínimo 3 vezes** significa acontecerem 3 tiros certos e 4 tiros certos...

b. Aqui n = 4, X ≥ 3, p = 0,3 e 1 − p = 0,7

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4)$

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0{,}0756 + 0{,}0081 = 0{,}0837$

Exercícios

Exercício 3:
a.Um inspetor de qualidade extrai uma amostra de 10 tubos aleatoriamente de uma carga muito grande de tubosque se sabe que contém 20% de tubos defeituosos. Qual é a probabilidade de que não mais do que 2 dos tubos extraídos sejam defeituosos

Solução

a. Aqui $n = 10$, $X \le 2$, $p = 0{,}2$ e $1 - p = 0{,}8$

$P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

Assim,

$P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0{,}1074 + 0{,}2684 + 0{,}3020 = 0{,}6778$ ou 6,78%

b.
Um engenheiro de inspeção extrai uma amostra de 15 itens aleatoriamente de um processo de fabricação sabido produzir 85% de itens aceitáveis. Qual a probabilidade de que 10 dos itens extraídos sejam aceitáveis?

Solução

b. Aqui $n = 15$, $X = 10$, $p = 0{,}85$ e $1 - p = 0{,}15$. A probabilidade de $X = 10$ itens aceitáveis com $p = 0{,}85$ é igual a probabilidade de $X = 5$ itens defeituosos com $p = 0{,}15$. Mas fazendo os cálculos encontramos:

0,0449 ou 4,5%

31/10/2012 Bertolo – Estatística Aplicada à Contabilidade 15

Desafio I

Qual a probabilidade de uma família de 4 filhos ter:

a. nenhum filho homem;
b. 1 filho homem;
c. 2 filhos homens;
d. 3 filhos homens
e. 4 filhos homens.

Interprete os resultados.

Respostas:

$P(X=0) = 1/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 1 delas não tenha filho homem.

$P(X=1) = 4/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 4 delas tenham 1 filho homem.

$P(X=2) = 6/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 6 delas tenham 2 filhos homens.

$P(X=3) = 4/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 4 delas tenham 3 filhos homens.

$P(X=4) = 1/16$ ... Em 16 famílias com 4 filhos esperamos, pela probabilidade, que 1 delas tenha 4 filhos homens.

31/10/2012 Bertolo – Estatística Aplicada à Contabilidade 16

Tarefa para casa!!!!

1.Uma firma exploradora de petróleo calcula que em 5% dos poços que perfura encontra gás natural. Se ela perfurar 10 poços, determine a probabilidade de:

a) não encontrar gás natural;
b) encontrar gás natural.

Respostas:
a. n= 10, p = 0,05 e P(X=k=0) = 0,5987 ou 59,87%
b. É a probabilidade do evento complementar, ou seja, $P(x \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,5987 = 0,4013$ ou 40,13%
X é o número de poços perfurados onde se encontra gás.

2. Um fabricante de móveis constatou que 10% dos móveis vendidos apresentavam problemas de fabricação. Se 20 móveis foram vendidos em uma semana, qual a probabilidade de que:
a. nenhum apresente problemas;
b. pelo menos, dois móveis apresentem problemas.

Respostas:
a. n= 20, p = 0,10 e P(X=k=0) = 0,1216 ou 12,16%
b. É a probabilidade do evento complementar, ou seja, $P(x \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0,1216 - 0,2702 = 1 - 0,3918 = 0,6082$ ou 60,82%
X é o número de móveis apresentando problemas.

Tarefa para casa cont....

3. Numa linha de produção, 5% das peças são defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas de 10 unidades. Qual a probabilidade de haver 1 defeituosa numa certa caixa?

Respostas:
Distribuição Binomial n= 10 e p=0,05
P(X=k=1) = 0,3151 ou 31,51%

4. Em uma certa localidade, 40% dos correntistas bancários trabalham com o banco A, e os outros com o banco B.
Em 10 correntistas aleatoriaamente escolhidos, qual a probabilidade de serem clientes do banco A:
a. exatamente 4;
b. no máximo, 1;
c. pelo menos, 2.

Respostas:
n= 10, p = 0,40
a. P(X=k=4) = 0,2508 ou 25,08%
b. $P(x \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,0060 + 0,0403 = 0,0463$ ou 4,63%
X é o número de correntistas clientes do banco A.
c. $P(x>1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - 0,0463 = 0,9537$ ou 95,37%