PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total
e
Teorema de Bayes

BERTOLO

Lembrando a Aula Anterior

Probabilidade Condicional:

$$P(B|E_1) = \frac{P(B \cap E_1)}{P(E_1)}$$

Teorema do Produto:

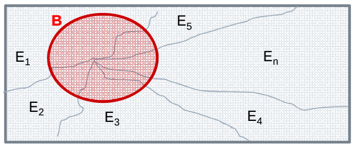
$$P(B \cap E_1) = P(B|E_1) . P(E_1)$$

Se os eventos B e E_1 forem INDEPENDENTES:

$$P(B \cap E_1) = P(B) . P(E_1)$$

Teorema da Probabilidade Total

Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ eventos que constituem uma partição do espaço amostral Ω, isto é:



- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n = \Omega$
- $P(E_i) > 0$, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
- $E_i \cap E_j = \varnothing$ para $i \neq j$

Assim, se B representa um evento, temos o seguinte teorema, conhecido como **teorema da Probabilidade Total**:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(B|E_i)$$

EXEMPLO 1

Um piloto de fórmula Um tem 50% de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 25%. Se o serviço de Meteorologia estimar em 30% a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

Solução

Definindo os eventos G: ganhar a corrida Ch: chover NCh: não chover

P(G|Ch)= 50% ou 0,50 P(G|NCh) = 25% = 0,25

P(Ch)= 30% ou 0,30 P(NCh) = 70% = 70

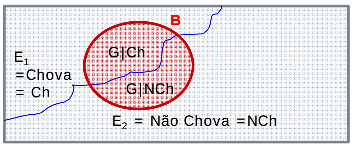
Queremos a CHANCE do piloto ganhar a corrida (com ou sem chuva)

P(G) = P(G ∩ Ch) + P(G ∩ NCh) ...probabilidade com chuva ou sem chuva!

P(G) = P(G|Ch)P(Ch)+ P(G|NCh)P(NCh)

P(G) = 0,50.0,30 + 0,25.0,70

P(G) = 0,325 ou **32,5%**



EXEMPLO 2

A experiência com testes psicotécnicos para habilitação de motoristas indica que 90% dos candidatos à habilitação aprovados no primeiro teste tornam-se excelentes motoristas.
70% dos candidatos reprovados no primeiro teste tornam-se péssimos motoristas. Admitindo-se a classificação dos motoristas apenas em excelentes ou péssimos, responda:

a. Um candidato acaba de ser reprovado em seu primeiro teste psicotécnico. Qual é a probabilidade de que se torne um excelente motorista?
b. Um candidato acaba de ser aprovado em seu primeiro teste psicotécnico. Qual é a probabilidade de que se torne um péssimo motorista?
c. Um indivíduo acaba de fazer um teste psicotécnico. Se 80% dos candidataos são aprovados neste teste, qual é a probabilidade de que se torne um excelente motorista?

Solução

A: candidato aprovado no primeiro teste
R: candidato ser reprovado no primeiro teste
E: candidato tornar-se excelente motorista
P: candidato tornar-se péssimo motorista

P(E|A) = 90% = 0,90
P(P|R) = 70% = 0,70
P(A) = 80% = 0,80

a. P(E|R) = 1 – P(P|R) = 1 – 0,70 = 0,30 ou 30%

b. P(P|A) = 1 – P(E|A) = 1 – 0,90 = 0,10 ou 10%

c. P(E) = P(E|A).P(A) + P(E|R).P(R) = 0,90.0,80+ 0,30.0,20

P(E) = 0,78 ou **78%**

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – Medeiros p.160

1. As máquinas A e B são responsáveis por 70% e 30%, respectivamente, da produção de uma empresa.
   A máquina A produz 2% de peças defeituosas e a máquina B produz 8% de peças defeituosas.
   Calcule o percentual de peças defeituosas na produção desta empresa.

Solução

P(A) = 70% e P(B) 30%

P(D|A) = 2% P(D|B) = 8%

P(D) = P(D|A).P(A) + P(D|B).P(B) ... Teorema da Probabilidade Total

P(D) = 0,02 . 0,70 + 0,08 . 0,30 = 0,038 ou **3,8%**

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – Medeiros p.160

2. Um aluno propõe-se a resolver uma questão de um trabalho.
   A probabilidade de que consiga resolver a questão sem necessidade de uma pesquisa é de 40%. Caso faça a pesquisa, a probabilidade de que consiga resolver a questão é de 70%.
   Se a probabilidade de o aluno fazer a pesquisa é de 80%, calcule a probabilidade de que consiga resolver a questão.

Solução

P(Sucesso|semPesquisa) = 40% e P(Fracasso|semPesquisa) = 60%
P(Sucesso|comPesquisa) = 70% e P(Fracasso|comPesquisa) = 30%
P(comPesquisa) = 80% P(semPesquisa) = 20%

P(Sucesso)= P(Sucesso ∩ semPesquisa) + P(Sucesso ∩ comPesquisa) =

= P(Sucesso|semPesquisa).P(semPesquisa) + P(Sucesso|semPesquisa).P(semPesquisa)

Teorema da Probabilidade Total

P(D) = 0,40 . 0,20 + 0,70 . 0,08 = 0,08 + 0,56 = 0,64 ou **64%**

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – Medeiros p.161

3. Um pesquisador desenvolve sementes de quatro tipos de plantas, P_1, P_2, P_3, P_4. Plantados canteiros-pilotos destas sementes, a probabilidade de todas germinarem é de 40% para P_1, 30% para P_2, 25% para P_3 e 50% para P_4.
   Um canteiro-piloto é selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de que todas as sementes ali plantadas tenham germinado?

Solução

$P(G|P_1) = 40\%$ $P(G|P_2) = 30\%$ $P(G|P_3) = 25\%$ $P(G|P_4) = 50\%$ $P(G|P_1) = 40\%$

$P(P_1) = P(P_2) = P(P_3) = P(P_4) = 25\%$ ...a probabilidades de ocorrência das plantas no canteiro-piloto são idênticas

$P(G) = P(G|P_1).P(P_1)+ P(G|P_2).P(P_2)+ P(G|P_3).P(P_3)+ P(G|P_4).P(P_4)$ ... T.Prb.TOTAL

P(G) = 0,40 . 0,25 + 0,30 . 0,25 + 0,25 . 0,25 + 0,50 . 0,25 = 0,3625 ou **36,25%**

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – Medeiros p.161

4. Um médico plantonista está examinando uma vítima de envenenamento que acaba de dar entrada no hospital. Um rápido exame preliminar leva o médico a concluir que o envenenamento é devido à ingestão de uma das drogas A ou B ou C. Ele dispões de dois tipos de medicamentos com o seguinte quadro de eficácia:

	Eficácia específica (%)	
Medicamento / Droga ingerida	M_1	M_2
A	70	50
B	40	90
C	80	60

Qual é o medicamento que o plantonista deve ministrar, se a urgência da situação não lhe permite outras opções?

Solução

$P(M_1|A) = 70\%$ $P(M_1|B) = 40\%$ $P(M_1|C) = 80\%$

$P(M_2|A) = 50\%$ $P(M_2|B) = 90\%$ $P(M_2|C) = 60\%$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ ...a probabilidades de ocorrer ingestão das drogas A, B ou C são idênticas

$P(E_1) = P(M_1|A).P(A)+ P(M_1|B).P(B)+ P(M_1|C).P(C)= 0,7.(1/3)+0,40(1/3)+0,80.(1/3)$

$P(E_1) = 0,6333$

$P(E_2) = P(M_2|A).P(A)+ P(M_2|B).P(B)+ P(M_2|C).P(C)= 0,5.(1/3)+0,90(1/3)+0,80.(1/3)$

$P(E_2) =$ **0,7333** Este é o medicamento a ser minitrado por apresentar a maior eficácia

Exemplo EXTRA 1

Uma urna contém 10 bolas pretas e 10 bolas brancas. Extraem-se duas bolas da urna. Qual a probabilidade de ambas serem brancas se:

- houver reposição da 1° bola extraída.
- não houver reposição da 1° bola extraída.

Solução

A urna contém um total de 20 bolas, 10 brancas e 10 pretas.

Nós queremos que as duas bolas extraídas sejam brancas: a 1° branca e a 2° branca. Seja A o evento "a primeira bola extraída é branca" e B o evento "a segunda bola extraída é branca".

Desejamos conhecer $P(A\cap B)$.

No caso a, $P(A\cap B) = P(A) . P(B|A) = P(A) . P(B)$, pois os eventos são independentes.

Veja que $P(A) = 10 /20$, ou seja, a probabilidade da primeira bola extraída ser branca é a relação entre o número de bolas brancas e o total de bolas da urna.

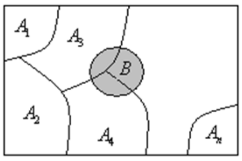
$P(B)$ também é $10 /20$, pois a bola extraída foi devolvida à urna, e o total de bolas continua igual (o total de bolas corresponde ao espaço amostral, que não foi alterado).

Assim, $P(A\cap B) = P(A) . P(B) = (10/20) . (10/20) = 1/4$

No caso b, a bola extraída da primeira vez não foi devolvida à urna; como eram 20 bolas, ficamos com 19 bolas no total. Como a primeira bola extraída foi branca, ficamos com 9 brancas e 10 pretas na segunda extração. Assim, $P(A\cap B) = P(A) . P(B|A) = (10/20) . (9/19) = 9/38$

Teorema de Bayes

Considere $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ eventos *mutuamente excludentes* cuja união representa o espaço amostral Ω, isto é, um dos eventos *necessariamente* deve ocorrer. Observe o diagrama seguinte:



Assim, se B é um evento qualquer, temos o seguinte teorema, conhecido como **teorema de Bayes**, representado pela expressão:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Saiba que o teorema apresentado permite determinar as probabilidades dos vários eventos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ que podem ser a *causa* da ocorrência do evento B. Devido a isto, o teorema de *Bayes* é também conhecido como *teorema da probabilidade das causas*.

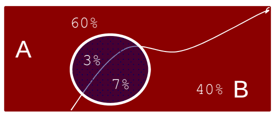
EXEMPLO 1

As máquinas A e B são responsáveis por 60% e 40%, respectivamente, da produção de uma empresa.
Os índices de peças defeituosas na produção destas máquinas valem 3% e 7% respectivamente. Se uma peça defeituosa foi selecionada da produção desta empresa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina B?

Solução

Definindo os eventos A: peça produzida por A
B: peça produzido por B
d: peça defeituosa

P(d|A) = 3% = 0,03
P(d|B) = 7% = 0,07
P(A) = 60% = 0,60
P(B) = 40% = 0,40



Queremos a probabilidade P(B|d)

$$P(B|d) = \frac{P(d|B).P(B)}{P(d|A).P(A)+P(d|B).P(B)}$$

Esta é a probabilidade de ser produzida por B dado que é defeituosa!

$$P(B|d) = \frac{0{,}07\ .0{,}4P(B)}{0{,}03.0{,}6+0{,}07.0{,}4} = 0{,}6087\ ou\ 60{,}87\%$$

A probabilidade de uma peça escolhida ao acaso ser produzida pela máquina B dado que ela é defeituosa é 60,87%.

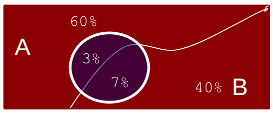
Automatizando o Exemplo 1

Definindo os eventos A: peça produzida por A
B: peça produzido por B
d: peça defeituosa

P(d|A) = 3% = 0,03
P(d|B) = 7% = 0,07
P(A) = 60% = 0,60
P(B) = 40% = 0,40

Queremos a probabilidade P(B|d)

$$P(B|d) = \frac{P(d|B).P(B)}{P(d|A).P(A)+P(d|B).P(B)}$$



Resolvendo por meio de uma tabela:

A_i	$P(A_i)$ (1)	$P(d\|A_i)$ (2)	$P(d\|A_i).PA_i)$ (3) = (1)x(2)	$P(A_i\|d)$ (4) = (3)/SOMA
maq A	60%	3%	0,60x0,03=0,018=18%	0,018/0,046=0,3913=39,13%
maq B	40%	7%	0,40x0,07=0,028=28%	0,028/0,046=0,6087=60,87%
Σ	100%	10%	**SOMA=P(d)=0,046=4,6%**	

Prob. de uma peça escolhida ao acaso ser produzida por A_i

Prob. de uma peça escolhida ao acaso produzida por A_i ser defeituosa

Prob. de uma peça escolhida ao acaso ser defeituosa

A probabilidade de uma peça defeituosa escolhida ao acaso ser produzida pela máquina B ou, em outras palavras,a probabilidade de ser produzida por B dado que ela é defeituosa é 60,87%.

EXEMPLO 2

Um técnico em aparelhos elétricos faz consertos em domicílio e deeve consertar um ferro elétrico na casa de um cliente. Ele avalia que o defeito deve estar na tomada do força da área de serviço, no cabo de força de alimentação ou na resistência do ferro. Por experiência, ele sabe que as probabilidades do defeito estar na tomada, no cabo ou na resistência são de 20%, 50% e 30%, respectivamente. Pensando em termos de ferramentas e peças de reposição do estoque que ele carrega, ele imagina que se o defeito for na tomada a probabilidade de conserto é de 95%. Se for no cabo de força é de 70% e se for na resistência é de 20%.

a. Qual a probabilidade de o técnico consertar o ferro no local com os seus recursos?
b. Qual a probabilidade do defeito ter sido no cabo de força, se o técnico conseguiu realizar o conserto?
c. O técnico chama o cliente e apresenta o ferro consertado. Perguntado do defeito, ele diz que teve que trocar a resistência (conserto mais caro). Qual a probabilidade de ele estar sendo sincero

Solução

Definindo os eventos CS: consertar o ferro T: defeito na tomada
C: defeito no cabo R: defeito na resistência

a. Queremos a probabilidade de consertar, qualquer que seja o defeito. Pelo teorema da probabilidade total, temos:

P(CS) = P(CS|T).P(T) + P(CS|C).P(C) + PCS|R).P(R)
= 0,95 . 0,20 + 0,70 . 0,50 + 0,20 .0,30 = 0,60

b. Neste caso, a condição dada é que o ferro foi consertado. Devemos, então, calcular a probabilidade condicional do defeito ser no cabo.

$$P(C|CS) = \frac{P(CS|C).P(C)}{P(CS/T).P(T) + P(CS/C).P(C) + PCS/R).P(R)} = \frac{0{,}7\ .0{,}5}{0{,}60} = 0{,}58$$

c. A probabilidade que queremos é a do defeito estar na resistência, dado o fato que o ferro está consertado, o que é calculado pela probabilidade condicional:

$$P(R|CS) = \frac{P(CS|R).P(R)}{P(CS/T).P(T) + P(CS/C).P(C) + PCS/R).P(R)} = \frac{0{,}20\ .0{,}30}{0{,}60} = 0{,}10$$

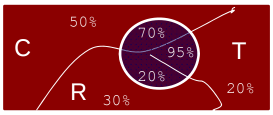
A probabilidade da informção estar correta é de 10%

Automatizando o Exemplo 2

Definindo os eventos CS: consertar o ferro
C: defeito no cabo R:defeito na resistência T: defeito na tomada

P(CS|T) = 0,95 P(CS|R) = 0,20
P(CS|C) = 0,70 P(T) = 0,20
P(C) = 0,50 P(R) = 0,30

Queremos a probabilidade P(C|CS), do defeito ser no cabo dado que foi consertado.



$$P(C|CS) = \frac{P(CS|C).P(C)}{P(CS|C).P(C)+P(CS|T).P(T)+P(CS|T).P(T)}$$

Resolvendo por meio de uma tabela:

A_i	$P(A_i)$ (1)	$P(CS\|A_i)$ (2)	$P(CS\|A_i).PA_i$ (3) = (1)x(2)	$P(A_i\|CS)$ (4) = (3)/SOMA
cabo	50%	70%	0,50x0,70=0,350=35%	0,350/0,600=0,5833=58,33%
tomada	20%	95%	0,20x0,95=0,190=19%	0,190/0,600=0,3167=31,67%
resistência	30%	20%	0,30x0,20=0,060=6%	0,060/0,600=0,1000=10,00%
Σ	100%	185%	**SOMA=P(CS)=0,600=60%**	

Prob. de uma defeito escolhido ao acaso ser no:

Prob. de ser consertado **dado** que o defeito é no dispositivo

Prob. de ser consertado E o defeito ser no dispositivo

Prob. de ser no dispositivo **dado** que foi consertado.

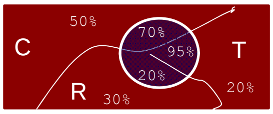
A probabilidade do defeito ser no cabo dado que foi consertado 58,33%.

Automatizando o Exemplo 2

Definindo os eventos CS: consertar o ferro
C: defeito no cabo R:defeito na resistência T: defeito na tomada

P(CS|T) = 0,95 P(CS|R) = 0,20
P(CS|C) = 0,70 P(T) = 0,20
P(C) = 0,50 P(R) = 0,30

Queremos a probabilidade P(R|CS), do defeito ser no cabo dado que foi consertado.



$$P(R|CS) = \frac{P(CS|R).P(R)}{P(CS|C).P(C)+P(CS|T).P(T)+P(CS|T).P(T)}$$

Resolvendo por meio de uma tabela:

A_i	$P(A_i)$ (1)	$P(CS\|A_i)$ (2)	$P(CS\|A_i).PA_i$ (3) = (1)x(2)	$P(A_i\|CS)$ (4) = (3)/SOMA
cabo	50%	70%	0,50x0,70=0,350=35%	0,350/0,600=0,5833=58,33%
tomada	20%	95%	0,20x0,95=0,190=19%	0,190/0,600=0,3167=31,67%
resistência	30%	20%	0,30x0,20=0,060=6%	0,060/0,600=0,1000=10,00%
Σ	100%	185%	**SOMA=P(CS)=0,600=60%**	

Prob. de uma defeito escolhido ao acaso ser no:

Prob. de ser consertado **dado** que o defeito é no dispositivo

Prob. de ser consertado E o defeito ser no dispositivo

Prob. de ser no dispositivo **dado** que foi consertado.

A probabilidade do defeito ser no cabo dado que foi consertado 10,00%.

Atividade 03

Ambientalistas de uma ONG (Organização Não Governamental), após um levantamento de dados, constataram, em uma cidade, a existência de três indústrias: I, II, III. Cada indústria participa com 40%, 35%, 25%, respectivamente, da produção industrial da cidade. A proporção de gases poluentes lançados na atmosfera é de 2% pela indústria I, 1% pela indústria II e 3% pela indústria III. Uma análise da emissão de gases poluentes ou de partículas sólidas na atmosfera é realizada ao acaso nesta cidade, o que permitiu aos ambientalistas verificar a existência de polução atmosférica. Qual a probabilidade dos gases considerados poluentes terem sidos lançados pela indústria II?

Solução

Primeiro denominamos cada um dos eventos, depois com muita atenção definimos a probabilidade condicionada ao evento de interesse.

II: representa o evento "lançado pela indústria II"

G: representa o evento "gases poluentes lançados na atmosfera"

Pergunta: Qual probabilidade dos gases considerados poluentes terem sidos lançados pela indústria II? Logo, queremos a probabilidade condicional de:

P(II|G) = ?

$$P(II|G) = \frac{P(II \cap G)}{P(G)} = \frac{P(II)P(G|II)}{P(G)}$$

Atenção! Não se esqueça que os gases poluentes podem provir de qualquer uma das três indústrias (e só de uma). Portanto, confira a seguir como realizar os cálculos de P(G), que representa a probabilidade dos gases considerados poluentes lançados na atmosfera.

Como calcular P(G)?

P(G) = P(I)P(G|I)+P(II)P(G|II) + P(III)P(G|III) = P(0,40)P(0,02)+P(0,35)P(0,01)+ P(0,25)P(0,03) = 0,019

$$P(II|G) = \frac{P(II)P(G|II)}{P(G)} = \frac{(0{,}35)(0{,}01)}{(0{,}40)(0{,}02)+(0{,}35)(0{,}01)+(0{,}25)(0{,}03)} = \frac{0{,}0035}{0{,}019} = 0{,}184 = 18{,}4\%$$

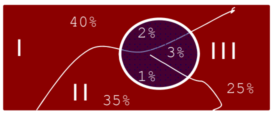
Portanto, conclui-se que a probabilidade dos gases, considerados poluentes, terem sido lançados pela indústria II é de aproximadamente 18,4%.

Automatizando o Exemplo 3

Definindo os eventos II: lançado por II
G: gases poluentes lançados na atmosfera

P(G|I) = 0,02 P(G|II) = 0,01
P(G|III) = 0,03 P(I) = 0,40
P(II) = 0,35 P(III) = 0,25

Queremos a probabilidade P(II|G), dos gases poluentes terem sido lançados por II.



$$P(II|G) = \frac{P(G|II).P(II)}{P(G|I).P(I)+P(G|II).P(II)+P(G|III).P(III)}$$

Resolvendo por meio de uma tabela:

A_i	$P(A_i)$ (1)	$P(G\|A_i)$ (2)	$P(G\|A_i).P(A_i)$ (3) = (1)x(2)	$P(A_i\|G)$ (4) = (3)/SOMA
I	40%	2%	0,02x0,40=0,008=0,8%	0,008/0,019=0,4210=42,10%
II	35%	1%	0,01x0,35=0,0035=0,35%	0,0035/0,019=0,1842=18,42%
III	25%	3%	0,03x0,25=0,0075=0,75%	0,0075/0,019=0,3947=39,47%
Σ	100%	185%	**SOMA=P(CS)=0,0190=1,90%**	

Prob. da indústria emitir gases poluentes

Prob. do gás poluente vir (dado) da indústria:

Prob. de ser poluente E ser da indústria

Prob. de ser da indústria dado que é poluente, ou, qual a prob. da indústria naquele gás poluente.

A probabilidade dos gases poluentes ter sido lançados pela indústria II é de 18,42%.

EXERCÍCIO 1 – Medeiros p.164

Um pesquisador desenvolve sementes de quatro tipos de plantas: P_1, P_2, P_3, P_4. Plantados canteiros-pilotos destas sementes, a probabilidade de todas germinarem é de 40%, para P_1, 30% para P_2, 25% para P_3, e 50% para P_4.

a. Escolhido um canteiro ao acaso, calcular a probabilidade de que todas as sementes tenham germinado.
b. Escolhido um canteiro ao acaso, verificou-se que nem todas as sementes germinaram. Calcule a probabilidade de que o canteiro escolhido seja o de sementes de P_3.
c. Escolhido um canteiro ao acaso, verificou-se todas as sementes germinaram. Calcule a probabilidade de que o canteiro escolhido seja o de sementes de P_1.

Solução

$P(G \cap P_1)$ = probabilidade de todas sementes do canteiro P_1 germinarem =40%.
$P(G \cap P_2)$ = probabilidade de todas sementes do canteiro P_2 germinarem =30%.
$P(G \cap P_3)$ = probabilidade de todas sementes do canteiro P_3 germinarem =25%.
$P(G \cap P_4)$ = probabilidade de todas sementes do canteiro P_4 germinarem =50%.

a. Escolhido um canteiro ao acaso ($P(P_1) = P(P_2) = P(P_3) = P(P_4) = 25\%$), a probabilidade de todas as sementes germinarem é:

$P(G) = P(G \cap P_1) + P(G \cap P_2) + P(G \cap P_3) + P(G \cap P_4)$ ... Teorema Probab. Total
$P(G) = P(G|P_1).P(P_1) + P(G|P_2).P(P_2) + P(G|P_3).P(P_3) + P(G|P_4).P(P_4)$
$= 0,40 \;.\; 0,25 + 0,30 \;.\; 0,25 + 0,25 \;.\; 0,25 + 0,50 \;.\; 0,25 = 0,3625$

b. Escolhido um canteiro ao acaso, a probabilidade o escolhido seja P_3 dado que nem todas as sementes germinaram é:

$$P(P_3|\bar{G}) = \frac{P(\bar{G}|P_3).P(P_3)}{P(\bar{G})} = \frac{0,75 \,.0,25}{0,6375} = 0,2941 \text{ ou } 29,41\%$$

c. Escolhido um canteiro ao acaso, a probabilidade que o escolhido seja P_1 dado que todas as sementes germinaram é:

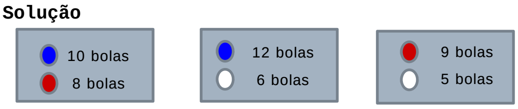
$$P(P_1|G) = \frac{P(G|P_1).P(P_1)}{P(G)} = \frac{0,40 \,.0,25}{0,3625} = 0,2759 \text{ ou } 27,59\%$$

EXERCÍCIO 2 – Medeiros p.164

Considere três urnas, a primeira contém 10 bolas azuis e 8 vermelhas, a segunda 12 bolas azuis e 6 brancas e a terceira 9 bolas vermelhas e 5 brancas..

a. Uma urna é escolhida ao acaso e uma bola é retirada. Qual a probabilidade de que essa bola seja branca?.
b. Uma urna é escolhida ao acaso e dela retirada uma bola branca. Qual a probabilidade de que essa urna seja a segunda?

Solução



Urna 1 Urna 2 Urna 3

P(Branca|Urna2) = (6/18) P(Branca|Urna3) = (5/14) P(Urna1)=P(Urna2)=P(Urna3)=1/3

a. Queremos a probabilidade de ser branca. Portanto precisamos calcular a probabilidade de ser branca E da urna 2 UNIÃO de ser branca E da urna 3:

$P(B) = P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3)$ ... Teorema Probab. Total
$P(B) = P(B|U_2) \;.\; P(U_2) + P(B|U_3).P(U_3)$
$= (6/18) \;.\; (1/3) + (5/14) \;.\; (1/3) = (29/42).(1/3) = 0,2302$ ou $23,02\%$

b. Escolhido uma bola branca (pode ser da urna 2 ou urna 3), queremos a probabilidade de que ela seja da urna 2:

$$P(U_2|B) = \frac{P(B|U_2).P(U_2)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{18}\right).\left(\frac{1}{3}\right)}{0,2302} = \frac{\frac{1}{9}}{0,2302} = 0,4827 \text{ ou } 48,27\%$$

EXERCÍCIO 3 – Medeiros p.164

Um vendedor de produtos eletrônicos estima que 2% dos seus clientes são da classe A, 15% da classe B, 63% da classe C e o restante das classes D e E. Ele está divulgando uma promoção para a venda de computadores portáteis e acredita que tem 90% de probabilidade de vendê-los para indivíduos da classe A, 70% de probabilidade de vendê-los para a classe B, para a classe C, 40%, e para as classes D e E, 10%.

a. Um cliente entra na loja. Qual a probabilidade de ele comprar o computador em promoção?
b. Um cliente entra na loja e não se interessa pela promoção. Qual a probabilidade de que seja da classe B?

Solução

P(V|A) = 90%	P(V|B) = 70%	P(V|C) = 40%	P(V|D e E) = 10%
P(A) = 2%	P(B) = 15%	P(C) = 63%	P(D e E) = 20%

a. Queremos a probabilidade do cliente (qualquer classe) que entrou na loja comprar o computador, ou, da loja vender (sucesso):

P(V) = P(V∩A) + P(V∩B) + P(V∩C) + P(V∩D) ... Teorema Probab. Total

P(V) = P(V|A) . P(A) + P(V|B).P(B) + P(V|C) . P(C) + P(V|D).P(D)

= 0,90 . 0,02 + 0,70 .0,15+ 0,40 . 0,63 + 0,10 .0,20 = 0,3950 ou 39,50%

b. O cliente não se interessou pela promoção e queremos saber a probabilidade dele ser da classe B:

$$P(\tilde{V}|B) = 1 - P(V|B) = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$$

$$P(B|\tilde{V}) = \frac{P(\tilde{V}|B).P(B)}{P(\tilde{V})} = \frac{0{,}30\,.0{,}15}{1-0{,}3950} = \frac{0{,}045}{0{,}605} = 0{,}0744 \text{ ou } 7{,}44\%$$

EXERCÍCIO 3 – Medeiros p.165

Um frigorífico abate frangos e é abastecido por 3 granjas. A Granja 1 (G1) contribui com 35% da produção para o abate, enquanto que a Granja 2 (G2) com 45% e a Granja 3 (G3) o restante.
Dados históricos dos arquivos do frigorífico revelam que 4% dos animais da G1 chegam com peso abaixo do normal, enquanto que da G2 essa porentagem é de 5% e da G3 é de 2%.

a. Escolhido ao acaso um animal para abate da G3, qual a probabilidade dele estar com peso normal?
b. Escolhendo-se ao acaso um animal para abate, qual a probabilidade de que ele apresente peso abaixo do normal? E peso normal?
c. Um animal escolhido ao acaso está com peso abaixo do normal. Qual a probabilidade de que ele seja da G2?

Solução

a. Queremos a probabilidade do animal escolhido ao acaso na G3 estar com peso normal:

$$P(\tilde{P}_{abaixo}|G3) = 1 - P(P_{abaixo}|G3) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98 \text{ ou } 98\%$$

b. Queremos a probabilidade do animal escolhido ao accaso de qualquer granja apresentar peso abaixo do normal e a de apresentar peso igual ao normal:

$$P(P_{abaixo}) = P(P_{abaixo} \cap G1) + P(P_{abaixo} \cap G2) + P(P_{abaixo} \cap G3) \ \ldots$$ Teorema Probab. Total

$$P(P_{abaixo}) = P(P_{abaixo}|G1).P(G1) + P(P_{abaixo}|G2).P(G2) + P(P_{abaixo}|G3).P(G3) =$$

= 0,04 . 0,35 + 0,05 .0,45 + 0,02 . 0,20 = 0,0405 ou 4,05%

$$P(\tilde{P}_{abaixo}) = 1 - P(P_{abaixo}) = 0{,}9595 \text{ ou } 95{,}5\%$$

c. Queremos a probabilidade do animal escolhido ao acaso, estando com peso abaixo do normal, ser da G2:

$$P(G2|P_{abaixo}) = \frac{P(P_{abaixo}|G2)).P(G2)}{P(P_{abaixo})} = \frac{0{,}05\,.0{,}45}{0{,}0405} = \frac{0{,}0225}{0{,}0405} = 0{,}5556 \text{ ou } 55{,}56\%$$

EXERCÍCIO 3 – Medeiros p.165

Um frigorífico abate frangos e é abastecido por 3 granjas. A Granja 1 (G1) contribui com 35% da produção para o abate, enquanto que a Granja 2 (G2) com 45% e a Granja 3 (G3) o restante.
Dados históricos dos arquivos do frigorífico revelam que 4% dos animais da G1 chegam com peso abaixo do normal, enquanto que da G2 essa porentagem é de 5% e da G3 é de 2%.

a. Escolhido ao acaso um animal para abate da G3, qual a probabilidade dele estar com peso normal?
b. Escolhendo-se ao acaso um animal para abate, qual a probabilidade de que ele apresente peso abaixo do normal? E peso normal?
c. Um animal escolhido ao acaso está com peso abaixo do normal. Qual a probabilidade de que ele seja da G2?

Solução

Resolvendo por meio de uma tabela:

A_i	$P(A_i)$ (1)	$P(P_{abaixo}\|A_i)$ (2)	$P(P_{abaixo}\|A_i).PA_i)$ (3) = (1)x(2)	$P(A_i\|P_{abaixo})$ (4) = (3)/SOMA
G1	35%	4%	1,4%	34,57%
G2	45%	5%	2,25%	55,56%
G3	20%	2%	0,4%	9,87%
		Soma	4,05%	

a. $P(P_{normal}|G3) = P(\bar{P}_{abaixo}|G3) = 1 - P(P_{abaixo}|G3) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98\ ou\ 98\%$

b. $P(P_{abaixo}) = a\ soma\ da\ coluna\ (3) = 4{,}05\%$

c. $P(G2|P_{abaixo}) = 55{,}56\%$

EXERCÍCIO 4 – Medeiros p.167

Uma empresa produz 4% de peças defeituosas. O controle de qualidade da empresa é realizado em duas etapas independentes. A primeira etapa acusa uma peça defeituosa com 80% de probabilidade de acerto. A segunda etapa acusa uma peça defeituosa com 90% de probabilidade.
Calcule a probabilidade de que:

a. Uma peça defeituosa passe pelo controle de qualidade
b. Ao adquirir uma peça produzida por esta empresa, ela seja defeituosa.

Solução

a. Queremos a probabilidade de que a peça defeituosa passe pelo controle de qualidade:

$P[(E_1|D)\cap(E_2|D)] = 0{,}20 . 0{,}10 = 0{,}02$ ou 2% ...Eventos independentes

b. Queremos a probabilidade de que seja defeituosa a peça adquirida desta empresa:

$P(D) = 4\%\ de\ 2\% = 0{,}04\ x\ 0{,}02 = 0{,}0008\ ou\ 0{,}08\%$

EXERCÍCIO 5 – Medeiros p.167

Uma pesquisa realizada sobre a preferência dos consumidores por três categorias de veículos A, B e C de uma indústria automobilística revelou que dos 500 entrevistados,

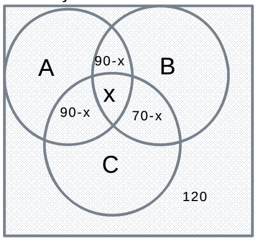
210 preferiam o veículo A | 230 preferiam o veículo B | 160 preferiam o veículo C

90 preferiam o v eículo A e B | 90 preferiam os veículos A e C | 70 preferiam os veículos B e C

Um consumidor é selecionado ao acaso entre os entrevistados. Calcule a probabilidade de que:

a. Ele prefira as três categorias.
b. Ele prefira somente uma das categorias.
c. Ele prefira pelo menos duas categorias.

Solução



x + 2(90−x) + (70−x) + A + B + C = 500 − 120 ⇒ 250−2x+A+B+C=380

(90−x)+x+(70−x)+B = 230 ⇒ B − x = 70

(90−x)+x+(70−x)+C = 160 ⇒ x = C

2(90−x)+x+A = 210 ⇒ A − x = 30

250−2x+(30+x)+(70+x)+x=380 ⇒ x = 380 − 350 = 30

a. Queremos a probabilidade de que prefira as três categorias:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{30}{500} = 0{,}06 \ ou \ 6\%$$

b. Queremos a probabilidade de que prefira apenas uma das categorias:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{60}{500} + \frac{100}{500} + \frac{30}{500} = \frac{190}{500} = 0{,}38 \ ou \ 38\%$$

c. Queremos a probabilidade de que prefira pelo menos 2 categorias:

P(2) + P(3) = 1 − P(0) − P(1) = 1 − (120/500) − 0,38 = 1 − 0,24 − 0,38 = 0,38 ou 38%

EXERCÍCIO 6 – Medeiros p.167

As fábricas A, B e C são responsáveis por 50%, 30% e 20% do total de peças produzidas por uma companhia. Os percentuais de peças defeituosas na produção destas fábricas valem respectivamente 1%, 2% e 5%. Uma peça produzida por eesta companhia é adquirida em um ponto de venda. Determine a probabilidade de que:

a. A peça seja defeituosa.
b. A peça tenha sido produzida pela fábrica C, sabendo-se que é defeituosa.
c. Não tenha sido produzida pela fábrica A se ela é boa.

Solução

a. Queremos a probabilidade de que a peça seja defeituosa:

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$

$$P(D) = 0{,}01\,.\,0{,}50 + 0{,}02\,.\,0{,}30 + 0{,}05\,.0{,}20 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}01 = 0{,}021 \ ou \ 2{,}1\%$$

b. Queremos a probabilidade de que seja produzida por C, sendo defeituosa:

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0{,}05\,.\,0{,}20}{0{,}021} = \frac{0{,}01}{0{,}021} = 0{,}4762 \ ou \ 47{,}62\%$$

c. Queremos a probabilidade não fora produzida por A, sendo boa:

$$P(\bar{A}|\bar{D}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}|B)P(B) + P(\bar{D}|C)P(C)}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}98\,.\,0{,}30 + 0{,}95\,.\,0{,}20}{1 - 0{,}021} = \frac{0{,}2940 + 0{,}1900}{0{,}979} = 0{,}4944 \ ou \ 49{,}44\%$$

Resumo

Neste capítulo, introduzimos os conceitos básicos atribuídos às probabilidades, e determinamos situações práticas às quais ela se aplica. Abordamos algumas definições e regras importantes e necessárias ao entendimento e aplicação do cálculo de probabilidades. Dentre elas, a **Definição Clássica**, a **Definição Frequentista** e a **Definição Subjetiva**, com a inserção de exemplos práticos e desenvolvidos passo a passo.

Estudamos alguns axiomas e teoremas de probabilidade. Indicamos a leitura do texto Probabilidade (MORETTIN, 2009), dentro do qual você conheceu os Teoremas de Probabilidade, a probabilidade condicional e a aplicação do teorema de Bayes para o cálculo de probabilidades *a posteriori*, utilizando as probabilidades *a priori*.